



ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

UNA LECTURA INICIAL

Francisco Carreras
Carlos Cova

2024

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES UNA LECTURA INICIAL

Autores:

Francisco Carreras

Carlos Cova

Riobamba – Ecuador

2024

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
UNA LECTURA INICIAL

©2024 Carreras García Francisco de Asís

Cova Salaya Carlos Eduardo

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

2024

Publicado por acuerdo con los autores.

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de dobles pares ciegos (externos)

Prohibido la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*.

El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva.

Corrección y diseño, respaldado por:

CienPapers, Editorial

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
UNA LECTURA INICIAL
Riobamba - Chimborazo, Ecuador
Editorial CienPapers, 2024
ISBN: 978-9942-48-336-2
Fecha de Publicación: 2024-08-28

Índice general

Introducción	v
1. Nociones básicas	1
1.1. ¿Qué es una ecuación diferencial en derivadas parciales?	1
1.2. Clasificación de las EDP	3
1.3. Solución de una EDP	5
1.4. Condición inicial de Cauchy	6
1.5. La Ecuación del Oscilador Armónico	8
1.6. Serie de Fourier	11
1.7. Calculo de variaciones	14
1.8. Ejercicios	20
2. Las EDP de Onda, del Calor y de Laplace	23
2.1. La Ecuación de Onda en una dimensión	23
2.2. La Ecuación de onda en el plano y en el espacio	31
2.3. Ejercicios	36
2.4. La Ecuación del Calor	38
2.5. Ejercicios	43
2.6. La ecuación de Laplace	44
2.7. Ejercicios	50
2.8. Clasificación de las ecuaciones de segundo orden	52
2.9. Ejercicios	59
3. El Método de separación de variables	61
3.1. Metodología de la separación de variables	61
3.2. Proceso de separación de variables	67

Subproblemas	68
3.3. Clasificación de los diferentes subproblemas	79
3.3.1. Condiciones de borde homogéneas de Dirichlet	81
3.3.2. Condiciones de borde homogéneas de Neumann	84
3.3.3. Condiciones de borde de Robin	88
3.4. Solución de las ecuaciones de onda, del calor y Laplace por el método de separación	96
3.5. Ejercicios	102
4. El Problema de Sturm–Liouville	107
4.1. Expansión de Sturm-Liouville	107
4.2. Aplicaciones de las expansiones regulares	111
4.3. Aplicaciones de las expansiones singulares	119
4.4. Ejercicios	121
Bibliografía	125
Índice alfabético	129
Índice de símbolos	133
Índice de figuras	136



Introducción

“Una de las más importantes y fascinantes ramas de las matemáticas que proporcionó el medio para las formulaciones matemáticas y soluciones de una gran variedad de problemas, es sin duda el estudio de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales”

Murray R. Spiegel.

Un entendimiento del origen de las ecuaciones de la física y la ingeniería es muy útil para desarrollar las estrategias en la obtención de las soluciones, y también para establecer las condiciones necesarias para tener un problema bien definido.

En problemas aplicados a diferentes áreas del conocimiento humano, aparecen con frecuencia las Ecuaciones Diferenciales Parciales, en adelante EDP, cuya importancia en estas áreas ha sido reconocida para la elaboración de modelos matemáticos que representan los problemas planteado. La complejidad e importancia actual de esos problemas, ha hecho que los métodos para resolver dichas EDP sean diversos y se hayan vuelto más analíticos.

Es por lo anterior que consideramos importante presentar este texto en español con los conceptos y técnicas fundamentales de las EDP, dado que la mayoría de los textos sobre el tema son escritos en inglés y la densidad de su contenido los hace cada vez más complicados para una lectura inicial del tema.

Es importante también indicar que los cursos de EDP algunas veces no suelen ser los

más interesantes para los estudiantes, porque algunos piensan que la solución de las EDP se obtiene por manipulaciones aburridas de series o integrales y en menor medida los que creen que solo por *separación de variables* se puede resolver estas ecuaciones.

Esto motivó el interés en presentar en este texto un primer estudio de las EDP, basado en ecuaciones clásicas de la física e ingeniería como son la ecuación de onda, calor y Laplace. Este trabajo está dirigido a estudiantes de pregrado de ciencias e ingeniería con conocimientos básicos en Cálculo Diferencial de una y varias variables, Análisis Vectorial y EDO. Utilizando la técnica de cambio de variable, se muestra que los problemas de EDP relacionados con las ecuaciones clásicas, antes mencionadas, se pueden convertir en una conocida EDO, simplificando así su solución.

El texto se ha planteado de una forma práctica para el estudiante, donde por medio de ejemplos se muestran las técnicas básicas para resolver la ecuación diferencial. En el capítulo 1 se presentan ciertas nociones fundamentales necesarias en el resto del trabajo, como es la ecuación del oscilador armónico en su forma general y las diferentes características de las soluciones; también se hace un bosquejo de las series de Fourier, en particular las correspondientes series de senos o cosenos. Finalmente, se realizó una pequeña revisión del Cálculo de Variaciones.

En el capítulo II se desarrolla una breve descripción de las ecuaciones de onda, calor y Laplace, las cuales describen en general los problemas referentes a la vibración de una cuerda, procesos termodinámicos y estados estacionarios de temperatura, respectivamente. Los términos físicos allí utilizados no son explicados en extensión, pero, si son del interés del estudiante, podrán ser ampliados en la bibliografía. En este capítulo también se muestra una forma de asociar las EDP lineales fundamentales de segundo orden con las ecuaciones de las secciones cónicas.

La parte central del texto gira alrededor de la técnica de separación de variables para las EDP, la cual genera una diversidad de problemas o casos, que se han clasificado y desarrollado en el capítulo 3. Particularmente la forma de presentar y obtener la ecuación solución, en cada caso, gira alrededor de combinaciones de senos y cosenos, o senos y cosenos hiperbólicos.

Uno de los aportes de este texto es la forma pedagógica como se clasifican los diferentes subproblemas que se generan de un problema dado que satisfaga la ecuación de Laplace y tenga condiciones de borde de Dirichlet, Neumann o Robin. También se muestra, para cada subproblema, que las soluciones se pueden obtener al realizar un simple cambio en la del subproblema inicial. Esto, aunque pareciera sencillo, no ha sido desarrollado en ningún libro y solo se presentan casos particulares.

En el último capítulo se muestra una aplicación de la técnica de separación de variables

para el problema clásico de Sturm-Liouville, dando un esquema de los pasos a seguir para establecer la expansión de una función en las autofunciones del correspondiente problema de Sturm-Liouville; se muestra también la aplicación para el caso de una expansión regular o singular.

Finalmente, los autores agradecerán al lector por cualquier sugerencia que sea formulada para el mejoramiento del texto.

1

Nociones básicas

1.1

¿Qué es una ecuación diferencial en derivadas parciales?

Los problemas aplicados de la vida real donde la variación del proceso depende de una sola variable independiente usualmente se resuelven usando las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's), las cuales simplifican mucho los modelos de la realidad física. Estas ecuaciones diferenciales dependen de una sola variable y eso limita los problemas que se puedan investigar, ya que en muchos casos se necesitan varias variables independientes.

Por esta razón al modelar un problema físico desde la perspectiva matemática donde tengan que intervenir dos o más variables independientes conlleva a una ecuación diferencial en derivadas parciales. De esta forma podemos decir que una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDP) es una ecuación matemática que relaciona una función incógnita $\Psi(x, y)$ y alguna de sus derivadas parciales $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ o $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$. Por ejemplo:

$$y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

Definición 1.1.1. Se llama Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDP) a una ecuación general de la forma

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_k, \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial^m \Psi}{\partial^{m_1} x_1 \partial^{m_2} x_2 \dots \partial^{m_k} x_k} \right) = 0 \quad (1.1)$$

que permite relacionar las variables independientes x_i , con $i = 1, 2, \dots, k$, la función incógnita Ψ y sus derivadas parciales.

En donde los m_i son enteros no negativos que cumplen $\sum_{i=1}^k m_i = m$.

También se puede utilizar la notación $\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \Psi_{x_i}$ de manera que cuando se tiene $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ es equivalente a Ψ_x o por ejemplo $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_{xx}$.

En este libro se considera, en algunos casos, la variable dependiente simplemente por Ψ y no necesariamente $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ y más aún las variables de que depende la ecuación diferencial en derivadas parciales serán aquellas que aparezcan en la ecuación, por ejemplo, en la ecuación:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

se deduce que $\Psi = \Psi(t, x)$.

De aquí en adelante se utilizará, indistintamente, la notación:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_{xx} \quad \vee \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \Psi_{xy}$$

Definición 1.1.2. *El orden de una EDP (1.1), es el orden de la mayor derivada parcial que tenga la ecuación.*

Ejemplo 1.1.1.

- a. $y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ es una EDP de orden 1.
- b. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ es una EDP de orden 2.
- c. $\Psi_{xxx} + \Psi_{xy} - 2\Psi_y = 0$ es una EDP de orden 3.

Definición 1.1.3. *Una EDP lineal es aquella que es lineal en la función Ψ y todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes de Ψ .*

En general, las EDP lineales de segundo orden en dos variables, tienen la forma

$$a\Psi_{xx} + b\Psi_{xy} + c\Psi_{yy} + d\Psi_x + e\Psi_y + f\Psi + g = 0 \quad (1.2)$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones reales de x e y definidas en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (esto garantiza que alguno de los coeficientes a, b, c sea diferente de 0). Si los coeficientes son todos reales con la posible excepción de g se dice que (1.2) es una EDP lineal a coeficientes constantes.

Ejemplo 1.1.2.

- a. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - (x + y) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Psi = 1$ es una EDP lineal de segundo orden.

- b. $\Psi_{yyy} + x\Psi_{xy} - 2e^{-xy}\Psi_{yy} = \cos x$ es una EDP lineal de tercer orden.
- c. $\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ es una EDP no lineal de primer orden.
- d. $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^3 - 3 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} = y$ es una EDP no lineal de tercer orden.

1.2

Clasificación de las EDP

La EDP lineal de orden dos (1.2) puede expresarse en forma general, como

$$a\Psi_{xx} + b\Psi_{xy} + c\Psi_{yy} + d = 0 \quad (1.3)$$

donde ahora la d es una función que depende de x , y , Ψ , Ψ_x y Ψ_y .

Definición 1.2.1. Se define el discriminante I de la EDP (1.3) como

$$I = b^2 - 4ac$$

De acuerdo al signo de I se pueden clasificar las EDP lineales de segundo orden.

Definición 1.2.2. Se dice que la ecuación (1.3) es:

- I. Parabólica, si $I = 0$;
- II. Elíptica, si $I < 0$;
- III. Hiperbólica, si $I > 0$.

Ejemplo 1.2.1.

- a. Dada la ecuación

$$2\Psi_{xx} + 3\Psi_y = 0,$$

se tiene $a = 2, b = 0, c = 0$; por lo tanto $I = 0$. Así la ecuación es parabólica.

- b. Dada la ecuación

$$\Psi_{xx} + 2\Psi_{yy} = 0,$$

se tiene $a = 1, b = 0, c = 2$; por lo tanto $I = -8 < 0$. Así la ecuación es elíptica.

- c. Dada la ecuación

$$\Psi_{xx} - 3\Psi_{xy} + \Psi_{yy} + 2\Psi_x = 0,$$

se tiene $a = 1, b = -3, c = 1$; por lo tanto $I = 5 > 0$. Así la ecuación es hiperbólica. $\square$

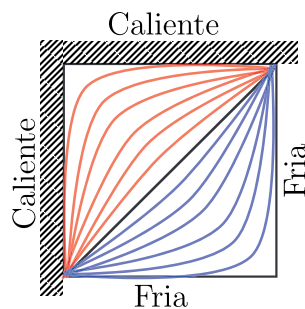
La terminología para hacer esta clasificación es equivalente a la utilizada en geometría para la clasificación de las ecuaciones generales de segundo orden. Es importante notar que esta forma de agrupar las EDP es útil porque cada grupo está asociado a diferentes problemas específicos de la física e ingeniería.

Las Ecuaciones Parabólicas permiten resolver problemas de propagación, tales como conductibilidad térmica, problemas de difusión, y algunos problemas donde la solución depende del tiempo. Aquí la EDP está sometida a condiciones iniciales y de frontera, como por ejemplo el problema de una barra larga que está totalmente aislada excepto en sus extremos (figura 1.1).

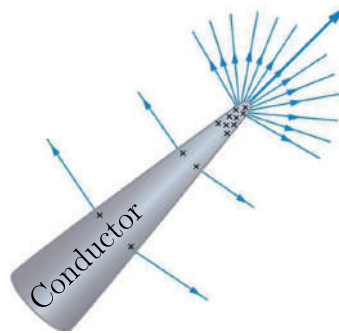


Figura 1.1: Conductibilidad térmica en una barra.

Las Ecuaciones Elípticas permiten resolver problemas de equilibrio, tales como distribución estacionaria de temperaturas, flujo de fluidos no viscosos, distribución de tensión en sólidos en equilibrio y en general problemas donde se tenga que determinar un potencial. Esta EDP está definida sobre dominios cerrados que están sujetos a condiciones de frontera y que no dependen del tiempo, como por ejemplo la distribución de temperatura sobre una lámina calentada (figura 1.2(a)) o el campo eléctrico cercano al vértice de un conductor (figura 1.2(b)).



(a) Distribución de temperatura sobre una lámina calentada.



(b) Campo eléctrico cercano al vértice de un conductor.

Figura 1.2: Problemas de equilibrio.

Las Ecuaciones Hiperbólicas permiten resolver problemas de fenómenos oscilatorios, tales como vibraciones mecánicas de cuerdas, ondas de un fluido y oscilaciones acústicas y electromagnéticas. Una ecuación característica es la ecuación

de onda con segunda derivada respecto al tiempo, la cual presenta la solución en diferentes estados en los cuales oscila el sistema, como por ejemplo una cuerda tensa que vibra a baja amplitud (figura 1.3).

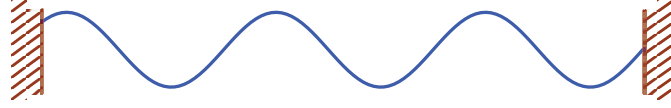


Figura 1.3: Cuerda tensa que vibra a baja amplitud.

1.3

Solución de una EDP

Como en el caso de las EDO's, la solución de la ecuación es una función ψ que junto con sus derivadas satisface la ecuación planteada; en el caso de las EDP es análogo.

Definición 1.3.1. Una solución de una EDP de la forma (1.1) en una región D del espacio de variación de las variables independiente es una función $\Psi \in \mathcal{C}^m(D)$ (conjunto de las funciones continuas en D conjuntamente con sus derivadas de orden m), tal que al sustituir Ψ y sus derivadas en (1.1) se satisface la ecuación en todos los puntos de D .

Ejemplo 1.3.1. La función

$$\Psi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \phi(y)$$

es una solución de la EDP $\Psi_x = x + y$. Se puede ver que la derivada respecto de x de la función es $\Psi_x = x + y + \frac{d\phi(y)}{dx}$ pero esta última derivada es 0 porque la función no depende de x . Así se satisface la igualdad.

Ejemplo 1.3.2. Dada la EDP

$$(y - x)\Psi_x + 2y\Psi_y = 3x - y + 2\Psi,$$

comprobar que la solución es la función $\Psi(x, y) = -x - y$. Para ello se calculan las derivadas parciales por separado $\Psi_x = -1$ y $\Psi_y = -1$ y se resuelven ambos lados de la igualdad

$$(y - x)(-1) + 2y(-1) = -3y + x$$

$$3x - y + 2(-x - y) = x - 3y$$

al ver que los resultados son iguales se confirma que la función $\Psi(x, y) = -x - y$ es solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales dada.

Ejemplo 1.3.3. La función $\Psi(x, y) = e^x \cos(y)$ es una solución de la EDP

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0.$$

Para comprobar primero busquemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\Psi_x &= e^x \cos y, & \Psi_y &= e^x (-\sin y), \\ \Psi_{xx} &= e^x \cos y, & \Psi_{yy} &= e^x (-\cos y)\end{aligned}$$

y luego al sustituir en la EDP se tiene

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = e^x \cos y + e^x (-\cos y) = 0$$

por lo tanto, se satisface la ecuación.

1.4

Condición inicial de Cauchy

Consideremos la ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes y no homogénea de la forma

$$a(x, y)\Psi_x + b(x, y)\Psi_y = c(x, y), \quad (1.4)$$

con una condición inicial sobre una curva Ω que está en el plano XY .

Definimos la *condición inicial de Cauchy*, a la restricción Ψ sobre Ω . Veremos esta condición inicial como una curva parametrizada

$$x = x_0(s), y = y_0(s), \Psi = \Psi_0(s), s \in [s_1, s_2]. \quad (1.5)$$

La ecuación (1.4) también se escribe

$$(a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -1 \right) = 0.$$

Se debe recordar que para una superficie dada por $z = \Psi(x, y)$, el vector

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -1 \right)$$

es una normal a la superficie. Así podemos decir que el vector (a, b, c) está en el plano tangente a una superficie solución en cada punto. Por lo tanto, se puede construir una curva contenida en la superficie solución al resolver el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x(t), y(t)), \\ \frac{d\psi}{dt} &= c(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Si además asumimos que en $t = 0$ se tenga $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $\Psi = \Psi_0(s)$; la curva también pasará por la curva inicial (1.5). Las curvas solución se llaman *características de la ecuación no homogénea*. Al variar el parámetro s la familia de características forma la superficie solución bajo ciertas condiciones para a, b y c .

Si por ejemplo que a, b, c son *Lipschitz* continuas, *el teorema de Cauchy-Picard* implica que las ecuaciones (1.6) tienen solución única local. Se concluye que se puede escribir

$$x = x(s, t), y = y(s, t), \Psi = \Psi(s, t)\tag{1.7}$$

y además

$$x(s, 0) = x_0(s), y(s, 0) = y_0(s), \Psi(s, 0) = \Psi_0(s).$$

Debemos recordar que (1.7) nos da la representación paramétrica de una superficie, en particular de la superficie solución localmente.

Ejemplo 1.4.1. Resuelva el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= x + y, \\ \Psi(x, 0) &= x^2\end{aligned}\tag{1.8}$$

Por lo tanto, al resolver el sistema (1.6) para este caso, se plantea

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{d\Psi}{dt} &= x + y\end{aligned}$$

y la condición inicial $x(s, 0) = s$, $y(s, 0) = 0$, $\Psi(s, 0) = s^2$.

Al integrar obtenemos

$$\begin{aligned}x &= t + c_1(s), \\y &= t + c_2(s),\end{aligned}$$

y al hacer uso de la condición inicial $t = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}x &= t + s, \\y &= t.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\frac{d\Psi}{dt} = t + s + t = 2t + s$$

y al integrar se tiene

$$\Psi(s, t) = t^2 + st + c_3(s)$$

y usando la condición inicial $\Psi(s, 0) = s^2$ tendremos que la solución es

$$\Psi(s, t) = t^2 + st + s^2.$$

Al escribir Ψ en función de x , y se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi(s, t) &= t^2 + st + s^2 \\&= t^2 + s(t + s) \\&= y^2 + (x - y)x \\&= x^2 - xy + y^2\end{aligned}$$

La cual se puede comprobar que es una solución de la ecuación diferencial parcial (1.8) con las condiciones iniciales dadas.

1.5

La Ecuación del Oscilador Armónico

Previamente se plantea la forma de las soluciones de un caso particular de la ecuación lineal de segundo orden no homogénea a coeficientes constantes

$$ay'' + 2by' + cy = f(x) \tag{1.9}$$

en donde a, b, c son constantes conocidas y $f(x)$ es una función también conocida.

Se expone el caso donde no hay fuerza de amortiguación (por ejemplo, cuando $b = 0$),

ni fuerza externa (por ejemplo, $f(x) = 0$ para todo x). En particular, se analiza una ecuación que surge en muchas aplicaciones de la ingeniería como es

$$y'' + cy = 0 \quad (1.10)$$

en donde c es un parámetro (constante) indeterminado. Esta ecuación se conoce tradicionalmente como *La Ecuación del Oscilador Armónico*. Ella es aplicable a muchos sistemas físicos, en particular al que describe el movimiento de una masa (sin fuerzas externas) en un resorte sin amortiguamiento.

La ecuación (1.10) tiene coeficientes constantes, y su ecuación característica viene dada por $r^2 = -c$, siendo sus raíces $r = \pm\sqrt{-c}$; se toma, por conveniencia, el cambio de variable $-c = \lambda$, así las raíces serán $r = \pm\lambda$, y la ecuación (1.10) se transforma en

$$y'' = \lambda y \quad (1.11)$$

Ahora se muestra un análisis de todos los casos posibles del parámetro λ .

1. Sea $\lambda > 0$, entonces una solución general es

$$F(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Sin embargo, para convenientes valores de las constantes $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, se puede conseguir una solución particular

$$F_1(x) = \frac{e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}}{2} = \cosh \sqrt{\lambda}x,$$

y si se elige $a_1 = -a_2 = \frac{1}{2}$, la solución particular es

$$F_2(x) = \frac{e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}}{2} = \sinh \sqrt{\lambda}x.$$

De esta manera

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda}x \quad (1.12)$$

es igualmente una solución general aceptable. La ventaja de esta última es que la ejecución de las condiciones iniciales en $x = 0$ es completamente transparente con esta notación.

Ejemplo 1.5.1. Consideremos la solución de la forma (1.12) y las condiciones

iniciales

$$F(0) = b_0 \text{ y } F'(0) = b_1 \quad (1.13)$$

Claramente la solución bajo estas condiciones toma la forma

$$F(x) = b_0 \cosh \sqrt{\lambda}x + \left(\frac{b_1}{\sqrt{\lambda}} \right) \sinh \sqrt{\lambda}x$$

Generalizando algo más, la escogencia de

$$a_1 = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}x_0}}{2} \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{e^{\sqrt{\lambda}x_0}}{2}$$

conduce a la solución particular

$$F_1(x) = \frac{e^{\sqrt{\lambda}(x-x_0)} + e^{-\sqrt{\lambda}(x-x_0)}}{2} = \cosh \sqrt{\lambda}(x-x_0)$$

y tomando el mismo valor para a_1 y el signo opuesto para a_2 , resulta

$$F_2(x) = \sinh \sqrt{\lambda}(x-x_0);$$

y combinando ambas soluciones se tiene

$$F(x) = b_0 \cosh \sqrt{\lambda}(x-x_0) + \left(\frac{b_1}{\sqrt{\lambda}} \right) \sinh \sqrt{\lambda}(x-x_0)$$

la cual satisface las condiciones iniciales (1.13) en cualquier punto x_0 .

2. Sea $\lambda = 0$ en (1.11), entonces una solución general tiene la forma simple

$$F(x) = c_1 + c_2x \quad (1.14)$$

3. Sea $\lambda < 0$ en (1.11), entonces $e^{\sqrt{\lambda}x} = e^{i\sqrt{-\lambda}x}$ y por lo tanto la solución toma la forma

$$F(x) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}x \quad (1.15)$$

la cual bajo las condiciones iniciales (1.13) del ejemplo 1.5.1 y para cualquier punto x_0 , es

$$F(x) = b_0 \cos \sqrt{-\lambda}(x-x_0) + \left(\frac{b_1}{\sqrt{-\lambda}} \right) \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}(x-x_0)$$

De esta manera, utilizando las ecuaciones (1.12), (1.14) y (1.15), la solución general de

la ecuación del oscilador armónico (1.11) en cualquier punto x_0 , puede ser expresada por

$$F(x) = \begin{cases} c_1 \cosh \sqrt{\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda}x & \text{si } \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \text{si } \lambda = 0 \\ c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

1.6

Serie de Fourier

En la práctica todos los sistemas físicos, cuando son manejados por una oscilación sinusoidal, usualmente responderán por oscilar a la misma frecuencia que la fuerza que los maneja. Esto conduce al problema matemático de expresar una función en forma de una serie trigonométrica. Para ello se utiliza, en una forma muy sencilla, las series de Fourier, las cuales tratan de expandir funciones periódicas en series trigonométricas.

En primer lugar, se dice que una función es periódica con período T si

$$f(x + T) = f(x)$$

para todo x en el dominio de la función; y al mínimo valor de T se le conoce como el período.

Sea f una función periódica (ver figura 1.4) de una variable x definida sobre el intervalo $[-T, T]$, la cual se expresa como suma de senos y cosenos de la siguiente forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{T} \right) \right] \quad (1.17)$$

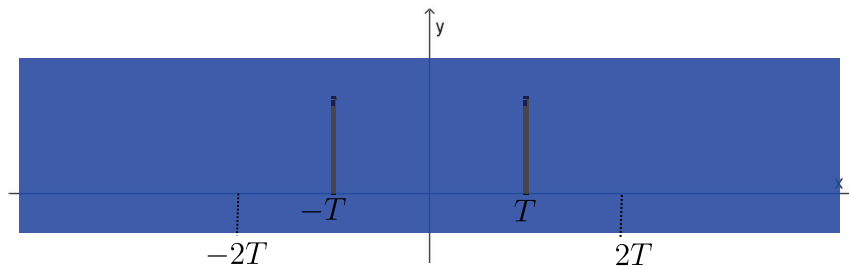


Figura 1.4: Función periódica $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{T} \right) \right]$.

Para hallar los valores de las constantes, simplemente se realizan ciertas operaciones

matemáticas (ver ***) y se obtiene

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

La ecuación (1.17) es conocida como la *serie de Fourier* de la función f en un intervalo $[-T, T]$, en donde es seccionalmente continua o continua por segmentos (es decir, continua en todo el intervalo excepto un número finito de puntos); y las ecuaciones (1.18) y (1.19) muestran la fórmula para hallar los valores de las constantes.

Ejemplo 1.6.1. Sea la función f definida en $[-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (1.20)$$

Claramente se ve que ella es continua en los intervalos $[-\pi, 0)$ y $(0, \pi]$; y que no es continua en $x = 0$, es decir, es seccionalmente continua en $[-\pi, \pi]$. Así los coeficientes de Fourier de f , aplicando las fórmulas (1.18) y (1.19), son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 1 + \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{-1 + (\pi - 1)(-1)^n}{\pi n}; \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \dots$.

Por lo tanto, la serie de Fourier asociada con la función (1.20) es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 + \pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{1 + (\pi - 1)(-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen} nx \right) \\ &= \frac{2 + \pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{\pi - 2}{3\pi} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \dots \right) \end{aligned}$$

□

Un caso particular se presenta cuando la función periódica tiene cierto tipo de simetría y

permite hablar de funciones pares o impares. Este caso es frecuente al utilizar separación de variables para resolver la ecuación diferencial parcial, y entonces se tiene la necesidad de representar una función en una serie trigonométrica que sea solo de senos o cosenos, donde por la naturaleza de las funciones seno y coseno, las series corresponderán a funciones impares y pares respectivamente.

Así, dada f seccionalmente continua en $[0, T]$, la *serie de Fourier de cosenos* para $f(x)$ en $[0, T]$ es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{T} \right) \right] \quad (1.21)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{T} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

La *serie de Fourier de senos* para $f(x)$ en $[0, T]$ es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{T} \right) \right] \quad (1.23)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{T} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Ejemplo 1.6.2. Hallar la expansión en serie de Fourier de senos y cosenos, en el intervalo $[0, \pi]$, para la función $f(x) = x(\pi - x)$, la cual es claramente continua en dicho intervalo.

Los correspondientes coeficientes son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \frac{1}{3}\pi^2 \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos nx dx = \frac{2}{n^2} ((-1)^n + 1) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx = \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

y así se obtienen las correspondientes series de Fourier

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (1.25)$$

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin nx \quad (1.26)$$

con $0 \leq x \leq \pi$.

1.7

Calculo de variaciones

Una aplicación clásica del cálculo básico es el problema variacional: encontrar el mínimo de una función f . En muchas situaciones el mínimo es alcanzado en el punto donde la derivada es igual a 0 ($f'(x) = 0$), aunque existan las excepciones a esta regla. En general, en los problemas prácticos de ingeniería comúnmente se conoce a priori que la función f tiene la forma que le permite alcanzar el mínimo donde la derivada se anula, es decir, técnicamente hablando es una función suave, así el criterio de la derivada es suficiente.

El cálculo de variaciones es la extensión de esta noción a una *clase superior* de funciones. Como, por ejemplo, se considera la *longitud del arco de una curva* $y(x)$,

$$s(y(x)) = \int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

cuando $x \in [0, 1]$.

Si y es la parábola $y(x) = x^2$ su longitud de arco en el intervalo $[0, 1]$ es

$$s(y(x)) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

y si y es la función sinusoidal $y(x) = \sin x$ su longitud de arco en el intervalo $[0, 1]$ es

$$s(y(x)) = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

Note que la variable para el *evaluador longitud de arco* no es un simple valor x ; es una función completa $y(x)$, así se establece que la longitud de arco es una *función de una función*.

De esta manera se dice que un *funcional* es una función de función, algunos ejemplos son:

a) La norma de $y(x)$: $\sqrt{\int_a^b |y(x)|^2 dx}$.

b) El valor medio de $y(x)$: $\frac{\int_a^b y(x) dx}{b - a}$.

c) El m -ésimo momento de una función de densidad probabilística:

$$\int_a^b x^m y(x) dx .$$

d) La energía almacenada en un campo potencial eléctrico:

$$\iiint_v |\nabla \Psi(x, y, z)|^2 dv .$$

Todos estos funcionales son expresables como integrales y ellos incluyen la función $y(x)$, sus derivadas y la variable x . Así se puede dar una forma general de los funcionales como

$$F[y(x)] = \int_a^b \chi[y(x), y'(x), x] dx \quad (1.27)$$

o, para orden superior

$$F[\Psi(x, y, z)] = \iiint \chi[\Psi, \nabla \Psi, x, y, z] dx dy dz . \quad (1.28)$$

El integrando $\chi[\cdot]$ es comúnmente llamado *El Lagrangiano*.

El objetivo principal del Cálculo de Variaciones es encontrar, dentro de una clase de funciones $y(x)$ (o $w(x, y, z)$), aquella que minimice el funcional $F[y(x)]$ (o $F[w(x, y, z)]$).

Ejemplo 1.7.1. Encontrar la curva más corta (es decir, la geodésica) $y(x)$ que conecta los puntos $(0, y(0))$ y $(1, y(1))$ (ver figura 1.5).

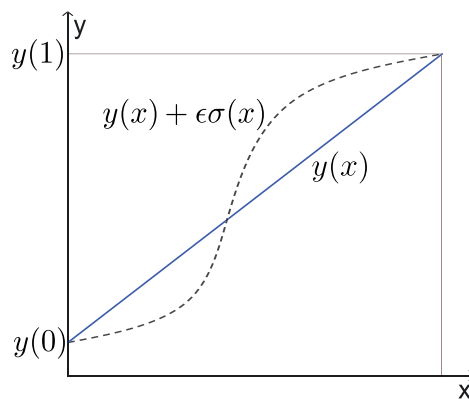


Figura 1.5: Curva más corta $y(x)$ que conecta los puntos $(0, y(0))$ y $(1, y(1))$.

La idea es introducir una nueva curva que reducirá el trabajo a minimizar una función de una sola variable y así aplicar el criterio de la primera derivada. Sea $y(x)$ la actual geodésica (se ignora que la solución es una línea recta) y se considera el efecto de

perturbarla mediante una función suficiente pequeña $\varepsilon\sigma(x)$; formando una nueva curva $y(x) + \varepsilon\sigma(x)$, donde $\sigma(x)$ puede ser cualquier función diferenciable y ε es un factor de escala (como se verá claramente más adelante). El funcional será

$$F[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

donde el Lagrangiano es la longitud de arco. Para la curva perturbada se tiene

$$F[y(x) + \varepsilon\sigma(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x) + \varepsilon\sigma'(x)]^2} dx \quad (1.29)$$

Para una arbitraria $\sigma(x)$, la fórmula (1.29) muestra una función bien definida sobre el escalar ε donde $f(\varepsilon)$ es igual a la longitud de arco de la curva $y(x) + \varepsilon\sigma(x)$. Esta función $f(\varepsilon)$ tiene la importante propiedad de que toma su mínimo cuando $f(\varepsilon) = 0$, porque la curva $y(x)$ fue escogida como la de longitud más corta. De esta forma, mediante las reglas simples del cálculo se cumple:

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F[y(x) + \varepsilon\sigma(x)] = 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon = 0 \quad (1.30)$$

Tomando (1.30) como nuestra guía, se estudia el funcional (1.29) y su derivada será

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(1 + [y'(x) + \varepsilon\sigma'(x)]^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2[y'(x) + \varepsilon\sigma'(x)] \sigma'(x) dx$$

y en $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(0) = \int_0^1 (1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \sigma'(x) dx \quad (1.31)$$

Por razones que se verán más adelante, se expresa (1.31) en términos de $\sigma(x)$ no diferenciado. Así aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} f(0) &= \int_0^1 (1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \frac{d}{dx} \sigma(x) dx \\ &= \left| \left[(1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \right] \sigma(x) \right|_{x=0} \\ &\quad - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[(1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \right] \sigma(x) dx \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ahora como se está buscando la curva más corta entre dos puntos terminales específicos $(0, y(0))$ y $(1, y(1))$, solo interesa las curvas $y(x) + \varepsilon\sigma(x)$ que pasan a través de los mismos puntos finales. Por lo tanto, se minimiza (1.29) sobre perturbaciones σ que se

anulan en los puntos $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 0$.

De esta manera la condición (1.30) es reducida por medio de (1.32) a

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left[(1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \right] \sigma(x) dx = 0 \quad (1.33)$$

Según esta ecuación, la integral es cero al multiplicar una función arbitraria por la función

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \right] \quad (1.34)$$

pero la única forma de que esto pueda suceder es si la ecuación (1.34) ella misma es cero

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y'(x) \right] = 0 \quad (1.35)$$

Observación 1.7.1. La lógica que conduce a la ecuación (1.35) es algunas veces identificada como *El Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones*.

Desarrollando la ecuación (1.35) encontramos que

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} y''(x) - \frac{1}{2} (1 + y'(x)^2)^{-\frac{3}{2}} 2y'(x)^2 y''(x) \\ &= (1 + y'(x)^2)^{-\frac{3}{2}} y''(x) \\ \Rightarrow y''(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

De esta forma, las únicas funciones que satisfacen (1.36) son de la forma $y = mx + b$, es decir, líneas rectas. Así se llega a la siempre conocida conclusión de que el camino más corto entre dos puntos es una línea recta.

La derivación en este ejemplo fácilmente se generaliza a el caso de un funcional arbitrario de la forma (1.27). Una vez más $y(x)$ es la función a minimizar, y considerando el hecho de perturbar $y(x)$ por $\varepsilon\sigma(x)$ conduce a la función

$$f(\varepsilon) = F[y(x) + \varepsilon\sigma(x)] = \int_a^b \chi[y(x) + \varepsilon\sigma(x), y'(x) + \varepsilon\sigma'(x), x] dx$$

Ahora bajo la condición de que $f'(\varepsilon) = 0$ cuando $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} \chi[y(x) + \varepsilon\sigma(x), y'(x) + \varepsilon\sigma'(x), x] \Big|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} \chi[y(x), y'(x), x] \sigma(x) + \frac{\partial}{\partial y'} \chi[y(x), y'(x), x] \sigma'(x) \right) dx \end{aligned}$$

e integrando por partes el segundo miembro de la integral se tiene:

$$f'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} \chi [y(x), y'(x), x] \sigma(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \chi [y(x), y'(x), x] \right) \sigma(x) \right) dx + \left. \frac{\partial}{\partial y'} \chi [y(x), y'(x), x] \sigma(x) \right|_{x=a} \quad (1.37)$$

La mayoría de las aplicaciones del cálculo de variaciones son similares al problema de la distancia más corta, en el cual se busca el mínimo de $F[x]$ sobre todas las funciones que toman valores específicos de frontera $y(a)$ y $y(b)$. Para esas aplicaciones el último término en la ecuación (1.37) es cero (ya que $\sigma(a) = \sigma(b) = 0$). Entonces la condición $f'(0) = 0$, depende de la expresión

$$\frac{\partial}{\partial y} \chi [y(x), y'(x), x] - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \chi [y(x), y'(x), x] \right) \quad (1.38)$$

cuando es multiplicada por cualquier función arbitraria $\sigma(x)$, hace que el valor de la integral desde $[a, b]$ de ese producto de funciones sea igual a cero. Por el Lema Fundamental se sigue que la función (1.38) es igual a cero. Esa condición para un mínimo de un funcional se conoce como *La ecuación de Euler–Lagrange*, y comúnmente se escribe como

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \chi}{\partial y'} - \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \quad (1.39)$$

La ecuación (1.39) es la generalización de la ecuación (1.35) para la clase de funcionales de la forma (1.27).

Observación 1.7.2.

1. Como una regla, la ecuación de Euler–Lagrange (1.39) cuando se expande es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para $y(x)$ (por ejemplo, vea la ecuación (1.36)).
2. Si los valores dados de $y(a)$ y $y(b)$ se combinan con la ecuación (1.39), se tiene un problema de valor de frontera bien definido para la función $y(x)$.

La condición Euler–Lagrange para un funcional es igual a la condición de pendiente cero para una función de una variable. Como tal, esta no es una condición ni necesaria ni suficiente para un mínimo. En los siguientes ejemplos es bastante claro por la forma del funcional que existe un mínimo, y así la ecuación Euler–Lagrange será válida. En general, sin embargo, es más preciso decir que la condición (1.39) vuelve estacionario el funcional (análogo al mínimo local, máximo local o punto de inflexión en el cálculo básico).

Ejemplo 1.7.2. La función $y(x)$ que minimiza el funcional

$$F[y(x)] = \int_0^1 (y(x)^2 + y'(x)^2) dx$$

y satisface las condiciones $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$, debe resolver la ecuación diferencial

$$0 = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (y^2 + y'^2) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + y'^2) = 2y'' - 2y$$

o equivalentemente $y'' = y$. Por lo tanto

$$y(x) = c \sinh x + d \cosh x$$

sería la solución general, pero para las condiciones de borde dadas será

$$y(x) = \left(\frac{1}{\sinh 1} \right) \sinh x.$$

Ahora la deducción de la condición de Euler–Lagrange para la minimización de funcionales de orden superior (1.28) es parecida a lo anterior, pero requiere un pequeño conocimiento de Análisis Vectorial para su implementación. Dejamos al interés del lector dicha deducción (ver Davis y Snider [12]), así la forma de dicha condición es

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial \Psi_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial \Psi_y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial \Psi_z} - \frac{\partial \chi}{\partial \Psi} = 0 \quad (1.40)$$

donde $\{\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z\}$ son las componentes de χ_Ψ .

Ejemplo 1.7.3. La integral de Dirichlet es el funcional definido por

$$F[\Psi] = \iiint_D |\nabla \Psi|^2 dV = \iiint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2) dV \quad (1.41)$$

donde D es alguna región del espacio. Si se busca la función $y(x, y, z)$ que minimice $F[y]$ sobre todos los funcionales que toman específicos valores sobre la frontera D , tal función debe satisfacer la ecuación obtenida aplicando (1.40) al Lagrangiano

$\chi = \Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2$ en (1.41)

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} 2\Psi_x + \frac{\partial}{\partial y} 2\Psi_y + \frac{\partial}{\partial z} 2\Psi_z - (0) = 2(\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}) = 2\nabla^2 \Psi$$

o

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.42)$$

la cual se conoce como *La ecuación de Laplace*.

Como se verá en los próximos capítulos la ecuación (1.42) es una de las más importantes en matemática aplicada, y el hecho que pueda ser caracterizada por un principio variacional muestra ser de mucho valor en la obtención de aproximaciones de sus soluciones (Strang [37]).

1.8

Ejercicios

Ejercicio 1.8.1. Considere la ecuación

$$y'' + y = 0 \tag{1.43}$$

- a) Muestre que la forma $y = A \cos(x + \varphi)$ para A y φ constantes, es una solución general, es decir, resuelve la ecuación inicial y sus constantes pueden ser escogidas para satisfacer las condiciones iniciales del tipo

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1.$$

- b) ¿Cuáles son las fórmulas para A y φ en términos de a , b_0 y b_1 ?
- c) Si la solución y fuese reescrita como

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{1.44}$$

Halle las expresiones para las constantes c_i en términos de A , φ y a .

Ejercicio 1.8.2. Como toda solución de la ecuación (1.43) puede ser escrita en la forma (1.44) donde las c_i ; son constantes arbitrarias. Demuestre que:

- a) Hay una única solución de (1.43) que cumple las condiciones de borde

$$y(0) = 2, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

- b) No hay una solución de (1.43) que cumple las condiciones de borde

$$y(0) = 2, y(\pi) = 0;$$

c) Hay infinitas soluciones de (1.43) que cumple las condiciones de borde

$$y(0) = 2, \quad y(\pi) = -2;$$

Ejercicio 1.8.3. Determinar la serie de Fourier de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 1.8.4. Muestre que

$$\int_a^b e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x} e^{-i\frac{2\pi m}{b-a}x} dx = 0$$

para n y m enteros con $m \neq n$; además utilizando este hecho desarrolle la forma exponencial de la serie de Fourier.

Ejercicio 1.8.5. Calcular la expansión en serie de Fourier de senos para la función $f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$, y haga un gráfico del comportamiento de la serie en los puntos extremos 0 y 2π .

Ejercicio 1.8.6. Calcular la expansión en serie de Fourier de cosenos para la función $f(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$, y haga un gráfico del comportamiento de la serie en los puntos extremos 0 y π .

Ejercicio 1.8.7. Calcular la expansión en serie de Fourier de senos para la función $f(x) = e^x$ en $[0, \pi]$, y haga un gráfico del comportamiento de la serie en los puntos extremos 0 y π .

Ejercicio 1.8.8. Calcular la ecuación de Euler–Lagrange para los siguientes funcionales:

$$(a) \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y} dx$$

$$(c) \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx$$

$$(b) \int_0^1 (1 - x^2) y^2(x) dx$$

$$(d) \int_a^b (y'^2 + y^2 - yy') dx$$

2

Las EDP de Onda, del Calor y de Laplace

2.1

La Ecuación de Onda en una dimensión

El modelo físico más simple del fenómeno de propagación de una onda es el movimiento de la vibración de una cuerda extendida. Suponiendo que la longitud de la cuerda es L y que, cuando la cuerda está en equilibrio, ocupa la porción del eje X desde $x = 0$ hasta $x = L$ (ver figura 2.1). Se asume que la cuerda vibra en un plano, el plano (X, Ψ) , y que Ψ mide el desplazamiento vertical de la cuerda desde su posición de equilibrio. Puesto que la situación es dinámica, debe notarse que la función $\Psi = \Psi(x, t)$ no solo depende de la posición ' x ' sino también del tiempo ' t '.

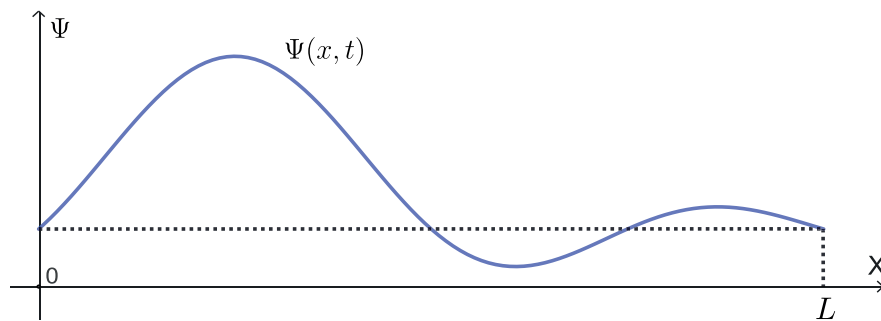


Figura 2.1: Movimiento de la vibración de una cuerda extendida.

Un diagrama de una pequeña parte de la cuerda entre los puntos x y $x + \Delta x$ se muestra en la figura 2.2. Para pequeños movimientos de una cuerda totalmente flexible, la tensión T en la cuerda será constante a lo largo de su longitud. Si la densidad de la cuerda es ρ (masa por unidad de longitud de la cuerda), entonces la masa del segmento de la cuerda mostrado en la figura 2.2 es aproximadamente $\rho \Delta x$; ya que la simple suposición de que el desplazamiento de la cuerda es ligero y por lo tanto se puede

despreciar los términos de orden 2 o mayores en Ψ y $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Así la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el segmento de la cuerda mostrado en la figura 2.2 es igual a la masa por la aceleración.

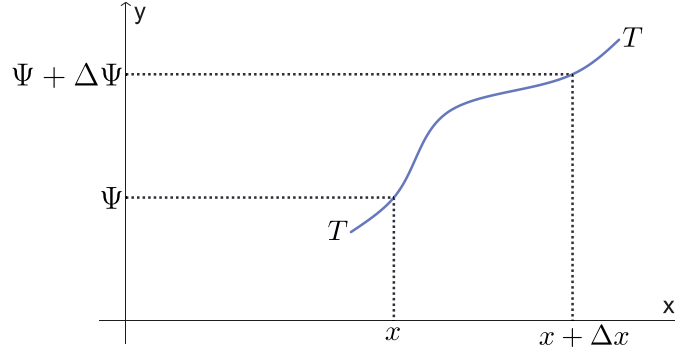


Figura 2.2: Tensión T para pequeños movimientos de una cuerda totalmente flexible.

La aceleración en la dirección vertical es la segunda derivada del desplazamiento Ψ con respecto del tiempo; la cual se convierte en este contexto en la derivada parcial $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$, ya que se sitúa en un sector particular de la cuerda, y por lo cual hay un valor fijo de x .

La fuerza dominante sobre esa porción es debido a la tensión T en la cuerda. Se asume que esa tensión es uniforme, así la contribución de T desde cada extremo de la cuerda se cancela, a menos que haya cierta curvatura en la cuerda (ver figura 2.2). En efecto el vector de tensión T está direccionado a lo largo de la tangente unitaria a el contorno de la cuerda, y cuya componente vertical viene dada por

$$T_t(x, t) = \frac{T \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2}} \approx T \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

La fuerza neta de tensión vertical sobre la partícula es entonces

$$T_t(x + \Delta x, t) - T_t(x, t) \approx T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Ahora por la segunda ley de Newton de la física se tiene

$$T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Delta x \approx \rho \Delta x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

y al dividir por $\rho \Delta x$ y hacer que $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene La ecuación de la onda en una

dimensión

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

donde la constante $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda y ρ es la densidad de la cuerda.

La ecuación (2.1) tiene muchas soluciones, pero antes de entrar en detalle sobre las condiciones que debe satisfacer una solución particular, se presenta una forma especial de la solución donde resalta alguna de las propiedades importantes de esta ecuación.

Sea $f(x)$ cualquier función dos veces diferenciable, y considere

$$\Psi(x, t) = f(x - vt).$$

Utilizando la regla de la cadena, las derivadas de Ψ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} f(x - vt) = f'(x - vt)(-v) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x - vt) = f'(x - vt)(1) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} f'(x - vt)(-v) = f''(x - vt)v^2 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} f'(x - vt) = f''(x - vt) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Luego se cumple la ecuación (2.1), es decir, $f(x - vt)$ satisface la ecuación de onda cualquiera sea la forma de f . Si se bosqueja el gráfico de cualquier $f(x)$ y se forma la familia $f(x - vt)$, se obtiene la solución de la ecuación de onda.

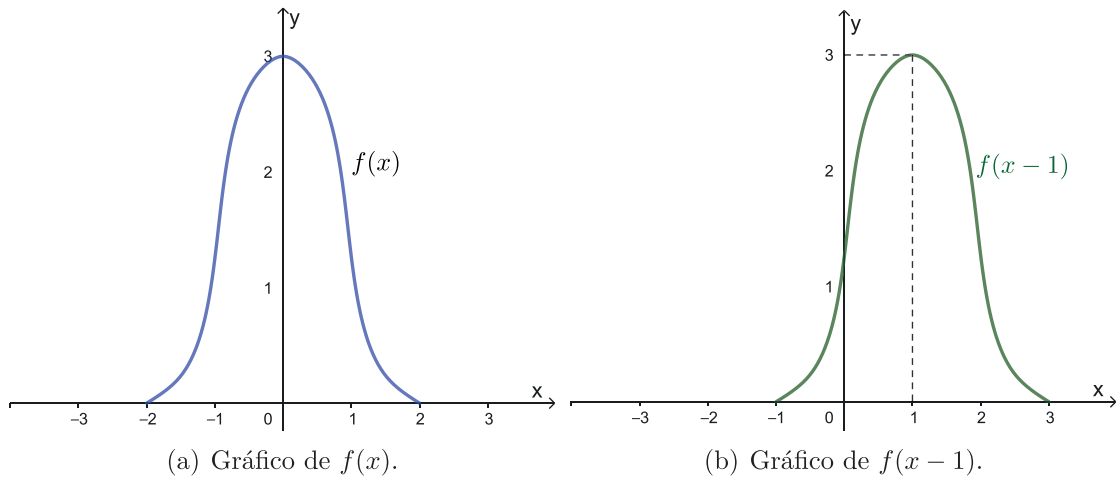


Figura 2.3: Gráfico de $f(x)$ y $f(x - 1)$.

En la figura 2.3(a) se representa un típico gráfico de $f(x)$; y se observa que para obtener el gráfico de $f(x - 1)$ (ver figura 2.3(b)), el valor máximo 3 que fue representado para $x = 0$ en la figura 2.3(a) ahora se desplaza a $x = 1$ en la figura 2.3(b), es decir, simplemente el gráfico de $f(x)$ está trasladado una unidad a la derecha. Similarmente la gráfica de $f(x - vt)$ se obtiene de la gráfica de $f(x)$ trasladándola (vt) unidades a la derecha (ver figura 2.4).

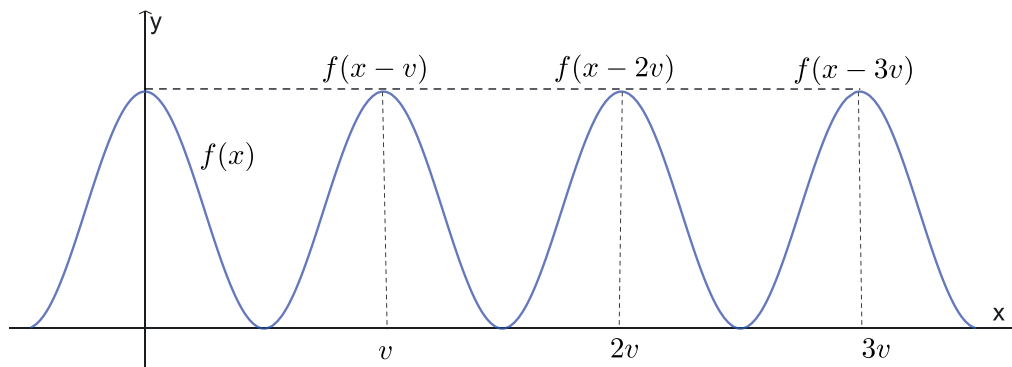


Figura 2.4: $f(x)$ trasladada (vt) unidades a la derecha.

Ahora se conoce como obtener soluciones de la ecuación de la onda, solo se debe tomar una curva cualquiera $f(x)$ y se desplaza su gráfico a la derecha a la velocidad v . Este es el significado intuitivo para la ecuación de la onda. También se puede ver que $f(x + vt)$ satisface la ecuación (2.1), por lo tanto representa una propagación de la onda hacia la izquierda a una velocidad v ; y puesto que la ecuación (2.1) es lineal, una forma general de la solución es

$$\Psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (2.3)$$

para f y g arbitrarias.

A pesar de la simplicidad de la ecuación (2.3) para representar las soluciones de la ecuación de onda, condiciones adicionales son necesarias para poder determinar la solución particular que describe la verdadera vibración de la cuerda. Dado que la ecuación (2.1) representa un enunciado de *la segunda ley de Newton*, se tiene que especificar, bajo los principios que rigen la Mecánica, la posición inicial y la velocidad de cada una de las partículas de la cuerda para determinar el movimiento de la misma. Estos valores se representan por $\Psi(x, 0)$ y $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ en $t = 0$.

Así, las condiciones iniciales para la ecuación de onda son

$$\Psi(x, 0) = U(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = V(x). \quad (2.4)$$

Ejemplo 2.1.1. Se utiliza la forma (2.3) para determinar la solución de la ecuación

de onda (2.1) bajo las condiciones iniciales

$$\Psi(x, 0) = e^{-x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = \sin x. \quad (2.5)$$

Al hacer cumplir las condiciones en (2.5) usando la forma (2.3) para Ψ , se tiene antes que nada que determinar las funciones f y g tales que

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= f(x - 0t) + g(x + 0t) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= e^{-x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) &= f'(x - 0v)(-v) + g'(x + 0v)v \\ &= -vf'(x) + vg'(x) \\ &= \sin x \end{aligned} \quad (2.7)$$

Utilizando la última parte de las ecuaciones (2.6) y (2.7) se pueden encontrar las funciones f y g . Si la derivada de la ecuación (2.6) se multiplica por v y se suma (2.7) resulta

$$2vg'(x) = -ve^{-x} + \sin x$$

luego al aplicar la integral indefinida se obtiene

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2} - \frac{\cos x}{2v} + C$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (2.6) se tiene

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{\cos x}{2v} - C$$

y así la forma (2.3) de la solución será

$$\Psi(x, t) = \frac{e^{-(x-vt)}}{2} + \frac{\cos(x-vt)}{2v} + \frac{e^{-(x+vt)}}{2} - \frac{\cos(x+vt)}{2v} \quad (2.8)$$

(la constante de integración C evidentemente desaparece). $\square$

La generalización de (2.3) para cualquier condición inicial viene dada por

$$\Psi(x, t) = \frac{U(x-vt) + U(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} V(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

la cual resuelve completamente el problema de valor inicial para la ecuación de onda; ya que si se calcula la derivada de la ecuación (2.9), aplicando el *Teorema Fundamental*

del Cálculo, y se evalúa en $t = 0$, esa derivada y la ecuación (2.9), se obtienen

$$\begin{aligned}\Psi(x, 0) &= \frac{U(x) + U(x)}{2} + \frac{1}{2v} \int_x^x V(\tau) d\tau \\ &= U(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) &= \frac{-vU'(x) + vU'(x)}{2} + \frac{1}{2v} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{x-vt}^0 V(\tau) d\tau \right) \\ &\quad + \frac{1}{2v} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_0^{x+vt} V(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{-vU'(x) + vU'(x)}{2} + \frac{1}{2v} [vV(x) + vV(x)] \\ &= V(x).\end{aligned}$$

Hay una simple interpretación física para la ecuación (2.9), la cual se entiende mejor si consideran dos casos por separado, primero $V(x) = 0$ y luego $U(x) = 0$. Estos casos podrían también combinarse para dar una solución.

Cuando $V(x) = 0$ el movimiento de la onda viene dado por

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} [U(x - vt) + U(x + vt)] \quad (2.10)$$

Esto muestra que la mitad de la perturbación inicial se mueve en la dirección positiva y la otra mitad en la dirección negativa. Esta situación se muestra en la figura 2.5.

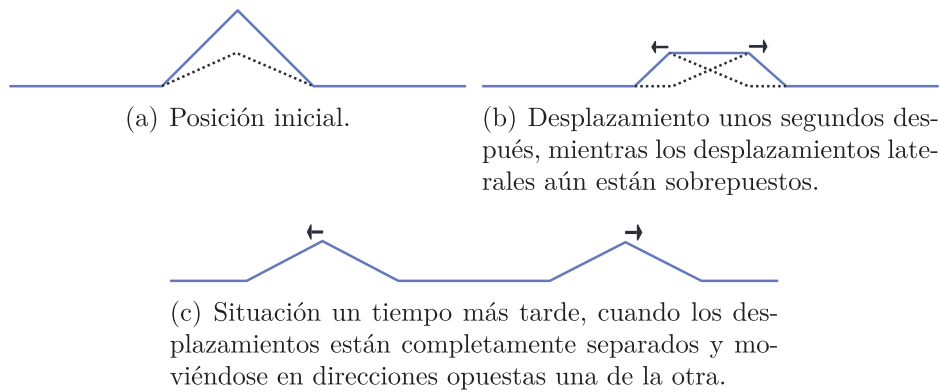


Figura 2.5: Desplazamientos.

La figura 2.5 muestra, en la parte 2.5(a) la posición inicial, en la parte 2.5(b) el desplazamiento unos segundos después, mientras los desplazamientos laterales aún están sobrepuestos, y en la parte 2.5(c) la situación un tiempo más tarde, cuando los despla-

zamientos están completamente separados y moviéndose en direcciones opuestas una de la otra. En este caso la cuerda tiene un desplazamiento inicial y parte de una posición de equilibrio.

Ahora el caso en el cual no hay desplazamiento inicial, pero si hay un impulso que representa cierta velocidad $V(x)$. La solución en este caso ($U(x) = 0$), que debería ser añadida a la primera solución, es

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2v} \left(\int_0^{x+vt} V(\tau) d\tau - \int_0^{x-vt} V(\tau) d\tau \right) \quad (2.11)$$

la cual podría representarse como

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} [\Psi_1(x + vt) + \Psi_1(x - vt)]$$

Esta solución nuevamente tiene dos partes, las cuales representan perturbaciones que se mueven en sentido contrario y además tienen signos opuestos. Si $V(x) > 0$, la perturbación moviéndose a la izquierda es positiva, mientras la que se mueve a la derecha es negativa.

En $t = 0$, por supuesto, ellas se cancelan. En la figura 2.6 se ve claramente la representación de este movimiento. En la parte 2.6(a) se muestra el caso $t = 0$ y además están representadas las funciones Ψ_1 y $-\Psi_1$, en la parte 2.6(b) las perturbaciones se han movido un poco, una con respecto a la otra, y en 2.6(c) ellas se han movido una distancia mayor.

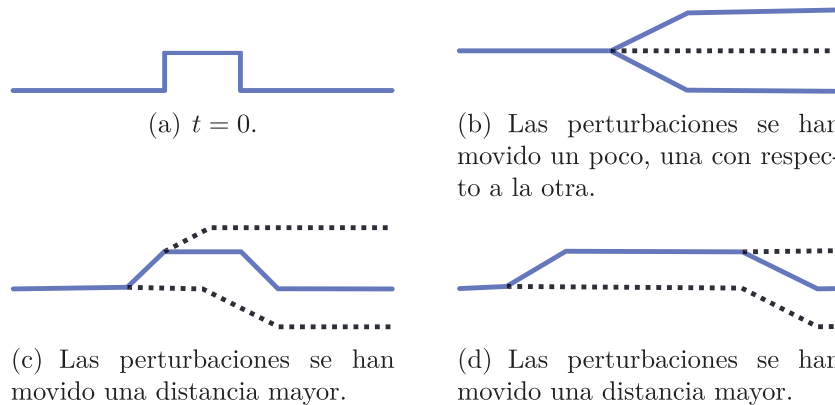


Figura 2.6: Desplazamiento de las perturbaciones.

Ejemplo 2.1.2. Considere la solución general (2.9), con velocidad $v = l$ y $V(x) = 0$. Si

$$U(x) = \begin{cases} \cos \pi x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

es la *función pulso coseno*, entonces la solución

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} \cos \pi(x + t) + \frac{1}{2} \cos \pi(x - t)$$

está formada por dos funciones pulso coseno, cada una teniendo su amplitud la mitad de la del pulso inicial, una moviéndose a la izquierda y la otra a la derecha.

Para $t = 0$ la solución será

$$\Psi(x, 0) = \cos \pi x, \quad x \in (-1/2, 1/2),$$

y para $t = 1$ la solución será

$$\Psi(x, 1) = \frac{1}{2} \cos \pi(x + 1) + \frac{1}{2} \cos \pi(x - 1),$$

donde para el primer coseno $x \in (-3/2, -1/2)$ y para el segundo $x \in (1/2, 3/2)$, es decir, se han movido cada una en direcciones opuestas. En la figura 2.7 se muestra dicho desplazamiento para varios valores de t .

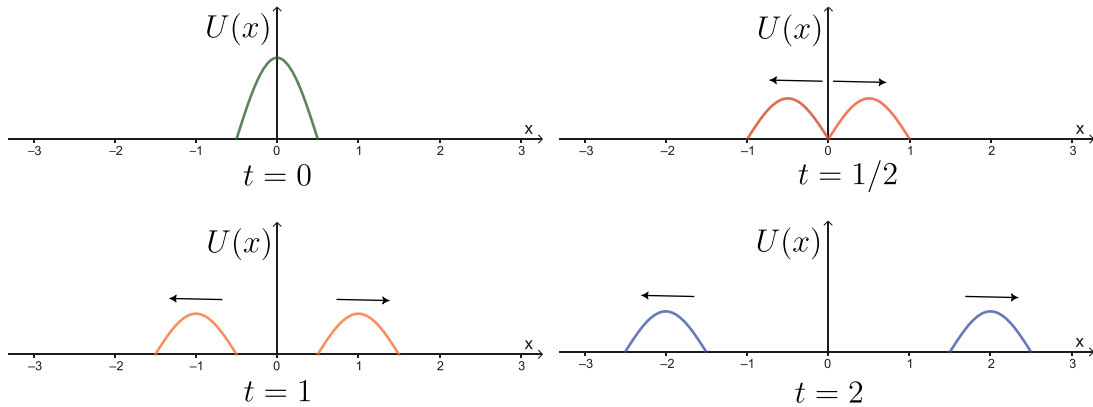


Figura 2.7: Desplazamientos para varios valores de t .

□

En muchas aplicaciones a modelos reales la cuerda no es infinitamente larga. Esto es, la cuerda debe tener un inicio y un fin (ver figura 2.1). Así, se tiene que resolver el problema de la ecuación de onda en un intervalo finito,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad (2.12)$$

con las *condiciones iniciales* dadas sobre ese intervalo,

$$\Psi(x, 0) = U(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = V(x), \quad 0 < x < L \quad (2.13)$$

y condiciones de borde que digan que especificaciones tiene la cuerda en sus extremos.

Las Condiciones de Borde se clasifican en tres casos:

Condición de Borde de Dirichlet. Si el extremo izquierdo de la cuerda está amarrado a un peso fijo, la llamaremos *Condición de Borde de Dirichlet* (ver figura 2.8(a)):

$$\Psi(0, t) = K_1 \quad (2.14)$$

Condición de Borde de Neumann. Si el extremo izquierdo de la cuerda está fijo de tal forma que su pendiente en $x = 0$ se mantiene en un valor específico, la llamaremos *Condición de Borde de Neumann* (ver figura 2.8(b)):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, t) = K_2 \quad (2.15)$$

Condición de Borde de Robin. Si en los extremos de la cuerda se tiene una combinación lineal del desplazamiento y la pendiente se mantiene constante, la llamaremos *Condición de Borde de Robin*:

$$\alpha \Psi(0, t) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, t) = K_3 \quad (2.16)$$

Por ejemplo, si la cuerda está atada a un alambre elástico (ver figura 2.8(c)) se tiene una condición similar a (2.16).

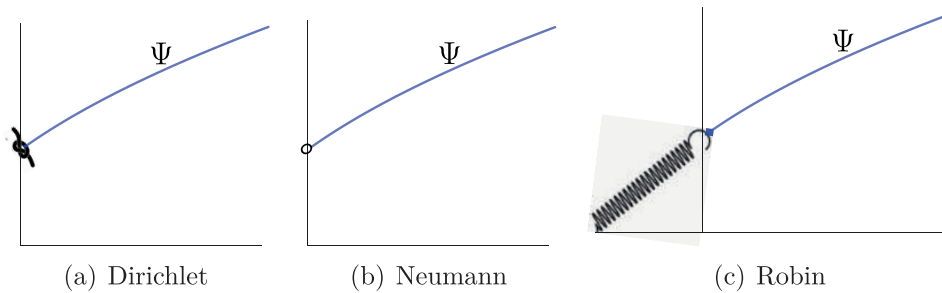


Figura 2.8: Condiciones de borde para la cuerda.

2.2

La Ecuación de onda en el plano y en el espacio

El estudio del fenómeno de la onda en dimensiones superiores toma la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi, \quad (2.17)$$

la cual permite describir vibraciones de membranas estiradas, ondas electromagnéticas y sónicas. La forma de las soluciones es más compleja que en una variable, aunque siguen manteniendo los efectos de la velocidad de propagación. Ahora, se analizan algunos ejemplos prácticos de fenómenos gobernados por la ecuación de onda.

Ejemplo 2.2.1. La ecuación (2.17) de segundo orden modela la vibración de la membrana de un tambor. Como se ve en la figura 2.9, la parte superior del tambor es una membrana tensa estirada sobre la orilla del tambor. Si se observan las fuerzas que se ejercen sobre una pequeña región rectangular $\Delta x \times \Delta y$ de la membrana, las fuerzas de tensión pueden ser atribuidas a dos cuerdas, una en la dirección del eje X y la otra del eje Y

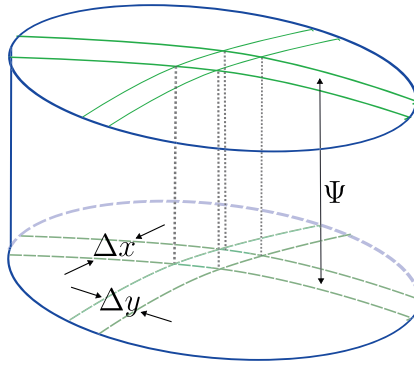


Figura 2.9: Tambor vibrante.

De esta forma, si $\Psi(x, y, t)$ describe el desplazamiento vertical, como se ve en la figura 2.9, entonces la fuerza neta de la tensión, al igual que en una dimensión, viene dada en función de la segunda derivada parcial

$$\text{Fuerza} = T_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Delta x + T_y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Delta y \quad (2.18)$$

donde T_x es la fuerza de tensión en la dirección del borde constante x , y similarmente para T_y . Además, que el borde constante x tiene Δy unidades de longitud, así la fuerza neta $T_x = T \Delta y$, y similarmente $T_y = T \Delta x$. En este modelo T es una constante de tensión por unidad de longitud que no varía con la dirección.

Ahora si ρ denota la masa de la membrana por unidad de área, la masa de la región considerada está dada por $\rho \Delta x \Delta y$. Luego por la segunda ley de Newton se tiene

$$T \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

y por procedimientos similares a los utilizados para una dimensión, se obtiene la ecua-

ción de onda en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.19)$$

donde la constante $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ es la velocidad.

Claramente las condiciones iniciales asociadas con (2.19) son la posición y la velocidad

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, 0) &= U(x, y), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, y, 0) &= V(x, y). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Las condiciones naturales de borde para la membrana superior del tambor serían las condiciones sobre $\Psi(x, y, t)$ para puntos (x, y) sobre el anillo o borde del tambor

$$\Psi(x, y, t) = W_1(x, y) \quad (2.21)$$

con (x, y) sobre el borde.

Normalmente se tiene $W_1(x, y)$ constante, en cualquier otro caso indicaría que el anillo o borde del tambor está torcido. Como en la sección anterior, el valor de Ψ sobre el borde es llamado *Condiciones de Borde de Dirichlet*.

Si faltase una parte del anillo o borde del tambor, dejando una parte de la membrana libre para moverse o sacudirse, un análisis detallado (el cual se omite) muestra que el gradiente de Ψ en la dirección n normal al borde libre será cero

$$n \nabla \Psi(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial n}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \text{ sobre el borde}$$

La especificación de $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sobre *el borde* constituye una generalización de la condición de pendiente sobre $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ en el problema de la cuerda (ver sección 2.1 ecuación (2.15)). En efecto, una relación de la forma

$$n \nabla \Psi(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial n}(x, y, t) = W_2, \quad (x, y) \text{ sobre el borde} \quad (2.22)$$

es conocida como una *Condición de Borde de Neumann en dimensión superior*.

La *Condición de Borde de Robin* se forma al tomar una combinación lineal de Ψ y su

derivada normal sobre el borde

$$\alpha \nabla \Psi(x, y, t) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial n}(x, y, t) = W_3, \quad (x, y) \text{ sobre el borde} \quad (2.23)$$

Esta puede ser usada para describir un anillo o borde del tambor "*flexible*" para la membrana sobre el borde superior del tambor. $\square$

Ejemplo 2.2.2. Otro fenómeno importante regulado por la ecuación de onda es el campo electromagnético. Este está representado por *las ecuaciones de Maxwell* para el campo eléctrico E y flujo magnético B en un medio fuente con una constante dieléctrica ε y permeabilidad μ

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (2.24)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla \times B = \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.27)$$

Se puede mostrar con el álgebra vectorial que cada componente rectangular del vector E satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \nabla^2 \Psi = v^2 \nabla^2 \Psi \quad (2.28)$$

con velocidad $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ (para mayor información sobre otras expresiones, relativas a electromagnetismo, que satisfagan la ecuación (2.28) ver Jackson [22], Panofsky y Phillips [27] y Ramo y otros [29]). Esta ecuación podría considerarse en una, dos o tres dimensiones, así veremos como serían unas condiciones de borde apropiadas para el caso de tres dimensiones.

En primer lugar, los valores iniciales para E y B deben estar dados como parte de las especificaciones para un problema electromagnético con valores iniciales. Así si Ψ representa una componente del campo eléctrico en (2.28), $\Psi(x, 0)$ está dada directamente. Entonces para encontrar a $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ en $t = 0$, simplemente se toma el rotacional del flujo magnético inicial B y aplicamos (2.27).

Las condiciones de borde en los problemas electromagnéticos son usualmente asignados a lo largo de las paredes conductoras. Si la conductividad es modelada según el infinito, entonces las referencias Panofsky y Phillips [27] y Ramo y otros [29] muestran que cualquier componente del campo eléctrico dentro del conductor mismo debe ser cero. En

consistencia. con la ecuación (2.25) se requiere que, cercano a la pared, la componente de E tangencial al borde de la pared sea cero. Así cuando Ψ representa una componente de un campo eléctrico paralela a una pared conductora, satisface la *Condición de Borde de Dirichlet*

$$\Psi(r, t) = 0 \text{ a lo largo de la pared.} \quad (2.29)$$

La condición de divergencia (2.24), aplicada en la proximidad de una pared conductora, iguala la derivada normal de la componente normal de E con la derivada tangencial de las componente tangenciales. Como estas últimas son cero a lo largo de la pared, se tiene la *Condición de Borde de Neumann*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(r, t) = 0 \text{ a lo largo de la pared} \quad (2.30)$$

siempre que Ψ represente una componente de un campo eléctrico normal a una pared conductora.

En particular se considera el cubo representado en la figura 2.10 y se supone que el campo eléctrico dentro de él tiene solo componente vertical, es decir, $E = \Psi k$.

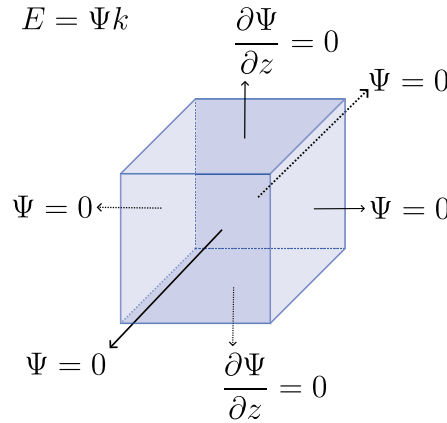


Figura 2.10: Campo eléctrico dentro del cubo.

De las ecuaciones de Maxwell se puede mostrar que cualquier componente de E satisface la *ecuación de onda de tercera dimensión*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Ahora referente a las condiciones de borde, se tiene que como Ψ es tangente a las 4 caras verticales entonces $\Psi = 0$ en esas caras. En la cara superior, el campo eléctrico es normal, luego no se tiene la misma condición. En este caso la divergencia del campo

eléctrico dentro del cubo es cero ($\nabla \cdot E = 0$), es decir, no hay fuentes. Esto significa que

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \quad (2.31)$$

luego en la cara superior las componentes x e y del campo eléctrico son cero, así también sus derivadas parciales; y la condición en la dirección z no es cero, pero su derivada parcial si lo es (2.31). Por lo tanto, las condiciones en la cara superior e inferior son $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$.

Se termina afirmando que, dentro de una cavidad cúbica, Ψ generalmente obedecerá condiciones de Dirichlet a lo largo de partes del borde y condiciones de Neumann en otras partes del mismo (*Las condiciones de Robin surgirán cuando la conductividad sea finita*). $\square$

Resumiendo lo hasta ahora descrito en estas dos secciones, vemos que la ecuación de onda representa las vibraciones de una cuerda, la parte superior de un tambor vibrante y campos electromagnéticos. Ahora bien, se puede generalizar la ecuación como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi \quad (2.32)$$

donde el Laplaciano ∇^2 puede ser de una, dos o tres dimensiones. Haciendo un simple cambio de escala de " t " por " vt " se obtiene una forma no dimensional de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi \quad (2.33)$$

la cual se usará de aquí en adelante.

Para conseguir una solución de (2.32) o (2.33) unívocamente se debe especificar las condiciones iniciales

$$\Psi(r, 0) \text{ y } \frac{\partial \Psi}{\partial t}(r, 0)$$

dentro del dominio que se tenga. Si ese dominio tiene fronteras finitas, entonces sobre cada porción del borde o frontera una de las tres Condiciones de Frontera (*Dirichlet*, *Neumann* o *Robin*) también debe ser especificada.

2.3

Ejercicios

Ejercicio 2.3.1. Utilice la ecuación (2.24) para encontrar una solución al problema de valor inicial:

1. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$; $\Psi(x, 0) = \sin x$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = 1$ con $0 < x < \pi$, $t > 0$.
2. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$; $\Psi(x, 0) = x(1 - x)$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = \sin 2\pi x$ con $0 < x < 1$, $t > 0$.
3. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$; $\Psi(x, 0) = \sin^2 x$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = 1 - \cos x$ con $0 < x < \pi$, $t > 0$.
4. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$; $\Psi(x, 0) = x^2(\pi - x)$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = 0$ con $0 < x < \pi$, $t > 0$.

Ejercicio 2.3.2. Cuales condiciones son necesarias para que las funciones U y V en (2.20) puedan garantizar que solo las ondas que se mueven hacia la izquierda serán excitadas por las condiciones iniciales.

Ejercicio 2.3.3. *La ecuación de onda no homogénea*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = h(x, t)$$

aparece si fuerzas distintas a la de la tensión son consideradas en la cuerda. Si h es conocida para todo x y t . Muestre que

$$\Psi(x, t) = \int_{\mu=-\infty}^t \int_{\xi=x-v(t-v)}^{\xi=x+v(t-v)} \frac{h(\xi, \mu)}{2v} d\xi d\mu$$

es una solución de dicha ecuación no homogénea.

Ejercicio 2.3.4. En $\mathbb{R}^3$ se introducen las coordenadas cilíndricas

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta, \quad x_3 = z.$$

Muestre que la ecuación de onda en tres dimensiones se convierte en

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{e1})$$

Si Ψ no depende de θ y z , entonces la ecuación (e1) se convierte en la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{e2})$$

Ejercicio 2.3.5.

1. Mostrar que cada componente del campo eléctrico E satisface la ecuación de onda

(2.28). (Ayuda: utilizar el rotacional de la ecuación (2.25) y combinarlo con las ecuaciones (2.24) y (2.27).

2. Mostrar que cada componente de la densidad de flujo magnético B también satisface la ecuación de onda (2.28).

2.4

La Ecuación del Calor

En todos los procesos naturales de termodinámica, el calor fluye desde puntos a altas temperaturas a puntos a bajas temperaturas. La razón del flujo del calor es controlada por el gradiente de la temperatura $\nabla\Psi(r, t)$. Se establece *la razón del flujo del calor* por un vector $q(r, t)$ conocido como *el flujo del calor*; en cualquier posición r apunta en la dirección del flujo del calor, y su magnitud iguala la razón con la cual el calor es conducido a través de una unidad de área normal a la dirección del flujo.

La ley de Fourier, una observación experimental, postula que q es proporcional a $\nabla\Psi$:

$$q = -k\nabla\Psi \quad (2.34)$$

donde k es la conductividad térmica, y el signo menos surge porque el flujo del calor va de derecha a izquierda, es decir, de lo caliente a lo frío.

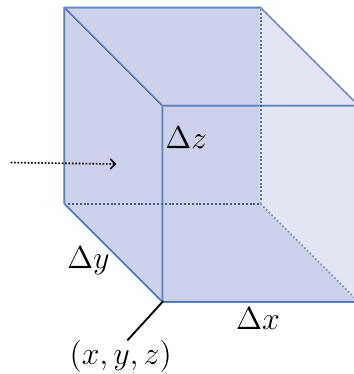


Figura 2.11: Calor que fluye dentro de la caja rectangular.

Considera, ahora, la velocidad a la que el calor fluye dentro de la caja rectangular que se muestra en la figura 2.11. Para la cara izquierda, el área del corte transversal es $\Delta y \Delta z$ y el calor entra a una velocidad

$$-k \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \Delta y \Delta z$$

Una fórmula similar da el flujo de calor fuera de la cara derecha, pero con x remplazada por $x + \Delta x$. Luego, la afluencia de calor a través de esas dos caras es

$$-k \frac{\partial \Psi(x + \Delta x, y, z)}{\partial x} \Delta y \Delta z - k \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \Delta y \Delta z \approx k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Sumando las contribuciones de las otras cuatro caras encontramos que la razón del flujo del calor dentro de la caja es

$$k \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = k \nabla^2 \Psi \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.35)$$

Ahora el efecto de ese calor de entrada es una subida de la temperatura de la caja. El calor específico c de un cuerpo es la cantidad del calor requerida para elevar la temperatura de una unidad de peso por un grado. Por lo tanto, si ρ denota la densidad, la razón del flujo del calor de la ecuación (2.35) genera una subida en la temperatura a razón de

$$k \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = c \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \eta \nabla^2 \Psi \quad (2.36)$$

donde $\eta = \frac{k}{c\rho}$ es la *difusividad térmica*. La ecuación (2.36), se conoce como *La Ecuación del Calor*.

Ejemplo 2.4.1. Dada la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 6 \Psi = 0 \quad (2.37)$$

Se aplica un pequeño cambio de la variable dependiente para transformarla en la ecuación del calor. Sea el cambio de variable

$$\Psi(x, t) = \nu(x, t) e^{(C_0 t + C_1 x)} \quad (2.38)$$

donde los valores de C_0 y C_1 deberán ser encontrados de manera que la nueva variable satisfaga la ecuación del calor. Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= e^{(C_0 t + C_1 x)} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} + C_0 \nu \right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= e^{(C_0 t + C_1 x)} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + C_1 \nu \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{(C_0 t + C_1 x)} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + 2C_1 \frac{\partial \nu}{\partial x} + C_1^2 \nu \right)$$

Ahora, sustituyendo estas ecuaciones en (2.37) y no considerando la función exponencial, ya que nunca se anulará, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (2C_1 + 4) \frac{\partial \nu}{\partial x} - 2 \frac{\partial \nu}{\partial t} + (C_1^2 + 4C_1 - 2C_0 + 6) \nu = 0$$

Donde los coeficientes $(2C_1 + 4)$ y $(C_1^2 + 4C_1 - 2C_0 + 6)$ deben ser iguales a cero, por lo tanto, al resolver esas ecuaciones se tiene que $C_0 = 1$ y $C_1 = -2$. De esta forma el cambio de variable (2.38) será

$$\Psi(x, t) = \nu(x, t)e^{(t-2x)}$$

y la ecuación del calor a resolver es

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}.$$

□

Ahora, deberíamos preguntar qué condiciones serían necesarias para determinar una única solución para la ecuación (2.36). Físicamente, es fácil de ver que el conocimiento de la razón de crecimiento de la temperatura es solo útil si se conoce la temperatura inicial. De esta forma la ecuación (2.36) debe ser ampliada con las condiciones iniciales

$$\Psi(r, 0) = F(r) \tag{2.39}$$

para alguna función F dada.

También rara vez se menciona que el calor fluye en cuerpos infinitos, así algunas condiciones de borde son necesarias para describir la interacción térmica del cuerpo con su medio ambiente. *La Condición de Borde de Dirichlet* es la especificación de la temperatura Ψ sobre la superficie del cuerpo

$$\Psi(r, t) = G_1(r), \quad r \text{ sobre el borde} \tag{2.40}$$

donde G_1 es un perfil superficie-temperatura mantenido por las fuentes de calor. Por ejemplo, cuando el borde de la superficie tenga una temperatura constante T_0 , así $G_1 = 0$ (Es posible que G_1 sea dependiente del tiempo, pero se ignora esa complicación por ahora).

Si se sabe la razón mediante la cual el calor fluye a través de la superficie, entonces de

acuerdo a la *ley de Fourier* la componente normal de $k\nabla\Psi$ es determinada allí. Esta es la *Condición de Borde de Neumann*

$$n\nabla\Psi(r, t) \frac{\partial\Psi}{\partial n}(r, t) = G_2(r), \quad r \text{ sobre el borde} \quad (2.41)$$

Por ejemplo, si una porción de la superficie está térmicamente aislada, entonces $G_2 = 0$ en esa porción.

Si la superficie está rodeada de una temperatura ambiental uniforme Ψ_0 , pero el material aislante filtra, entonces la razón de cambio del flujo del calor será aproximadamente proporcional a la diferencia entre la temperatura en la superficie del cuerpo y la temperatura exterior

$$-k \frac{\partial\Psi}{\partial n} = C(\Psi - \Psi_0)$$

donde n indica la dirección normal a la superficie del cuerpo. Así se tiene un ejemplo general de una *Condición de Borde de Robin*

$$\alpha\Psi(r, t) + \beta \frac{\partial\Psi}{\partial n}(r, t) = G_3(r) \quad (2.42)$$

donde, para nuestra interpretación anterior, $\alpha = C$, $\beta = k$ y $G_3(r) = -C\Psi_0$.

De esta manera, en el terreno físico queda demostrado que la solución de la ecuación del calor (2.36) está completamente determinada por la asignación del perfil inicial de temperatura en el interior del cuerpo y las especificaciones de borde en todos los puntos de su exterior.

Ahora se comprueba que algunas de las propiedades matemáticas de la ecuación del calor pueden ser deducidas de la *fórmula del Laplaciano*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.43)$$

Evidentemente $\nabla^2 f$ es una generalización de la segunda derivada de una función de una variable. Por lo que se conoce, ésta determina la concavidad o convexidad de la función; si $f'' > 0$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba, y si $f'' < 0$ la gráfica es cóncava hacia abajo, ver figura 2.12.

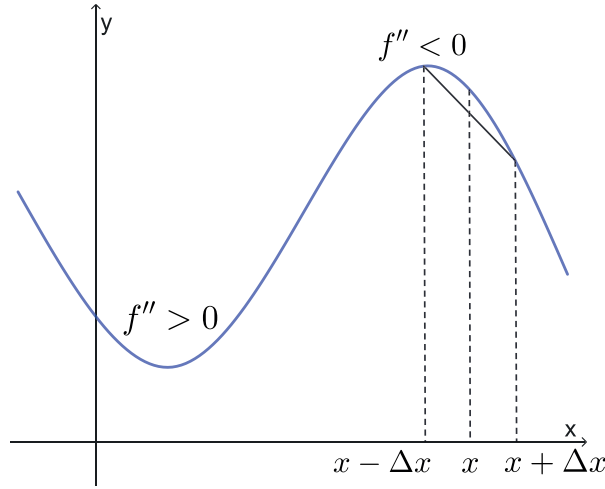


Figura 2.12: Concavidad de la función f .

En otras palabras, en una región donde $f'' < 0$ el valor de f en un punto x está situado arriba de la línea secante que conecta los valores de f en $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$:

$$f(x) > \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)}{2} \quad (2.44)$$

y cuando $f'' > 0$ ocurre lo contrario. La medida en la que f en x excede el valor promedio de f en los puntos cercanos $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$, como podemos constatar en la ecuación (2.44), parece en la figura 2.12 ser proporcional al valor negativo de la segunda derivada ($-f''(x)$). Claramente al considerar una aproximación finita para $f''(x)$ se puede ver

$$\begin{aligned} -f''(x) &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \left(f(x) - \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)}{2} \right) \frac{2}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Así se aproxima la ecuación del calor de primer orden (2.36) por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \eta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\approx -\eta M \left(f(x) - \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde las derivadas parciales, en realidad son derivadas totales, y $M = \frac{2}{\Delta x^2}$; esto da la siguiente interpretación física: la temperatura en un punto x cae o desciende a una razón de cambio proporcional a la diferencia mediante la cual $f'(x)$ excede la temperatura promedio de sus puntos vecinos. Note además que si la máxima temperatura en el

tiempo t ocurre en el punto x , entonces $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$ en ese punto. Esta observación es la base del *Principio del Máximo de la Ecuación del Calor*.

Ejemplo 2.4.2. Consideremos la fórmula

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\eta t}} d\tau \quad (2.46)$$

la cual define una solución explícita de la ecuación del calor en una dimensión sobre todo el eje X ($-\infty < x < +\infty$). Recordando que la ecuación del calor en una dimensión es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2};$$

así al calcular las correspondientes derivadas en la ecuación (2.46) tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi\eta t^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\eta t}} \left(\frac{(x-\tau)^2}{2\eta t} - 1 \right) d\tau,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\eta t}} \left(\frac{-(x-\tau)}{2\eta t} \right) d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{4\eta\sqrt{\pi\eta t^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4\eta t}} \left(\frac{(x-\tau)^2}{2\eta t} - 1 \right) d\tau,$$

y al multiplicar esta última ecuación por η se comprueba que la ecuación (2.46) es la forma de la solución de la ecuación del calor en una dimensión.

2.5

Ejercicios

Ejercicio 2.5.1. Encontrar el cambio de la variable dependiente que reduce la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 8\Psi = 0$$

en la ecuación del calor en una dimensión.

Ejercicio 2.5.2. Encontrar la solución del problema de valor inicial para la ecuación del calor

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

$$\Psi(x, 0) = \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

si la temperatura inicial es dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} \delta_1 & \text{si } x < 0 \\ \delta_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.5.3. La función error ocurre muy frecuentemente en la teoría de probabilidades y ella viene dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$$

Para ella existen tablas de valores, en particular $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. Luego exprese la solución del ejercicio anterior en términos de la función error.

2.6

La ecuación de Laplace

En el mundo físico podemos ver que todos los sistemas térmicos evolucionan en el tiempo hacia un estado estacionario o de equilibrio en el cual la temperatura Ψ es independiente del tiempo. Cuando el tiempo tiende a infinito, las soluciones de la ecuación del calor

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \eta \nabla^2 \Psi \quad (2.47)$$

tienden hacia una forma estacionaria; estas soluciones de equilibrio entonces satisfacen la forma independiente del tiempo de la ecuación (2.47), la cual es conocida como *la ecuación de Laplace*

$$\nabla^2 \Psi(r) = 0. \quad (2.48)$$

Las soluciones independientes del tiempo de la ecuación de onda, claramente también satisfacen la ecuación de Laplace. Esto nos permite tener a nuestra disposición un número de analogías físicas para invocar en el estudio de la ecuación (2.48), tales como perfiles de temperatura estacionaria, parte o cara superior del tambor en equilibrio, y campos electrostáticos. Por otra parte, notemos que, aunque físicamente las ondas tienden a desaparecer debido al amortiguamiento y esto conduce a soluciones de la forma (2.48); matemáticamente, sin embargo, no hay amortiguamiento en la ecuación de onda, así sus soluciones dinámicas no evolucionan en soluciones de la ecuación (2.48). (ver ejercicio 2.3.3 de la sección de ejercicios 2.3)

Las soluciones de la ecuación de Laplace (2.48) son conocidas como funciones armónicas, las cuales desempeñan un papel fundamental en el estudio de funciones analíticas

de variable compleja (Saff y Snider [30]). Dado que estas soluciones no dependen del tiempo, las condiciones iniciales no son necesarias y solo se especifican las condiciones de borde para determinar una solución única. Los tipos básicos de condiciones de borde son los mismos que se mencionaron para las ecuaciones de onda y el calor (Dirichlet, Neumann y Robin).

Usualmente condiciones de Dirichlet son especificadas para el potencial eléctrico, esto es constante sobre las paredes conductoras, ya que allí la componente tangencial de su gradiente E es cero (recuerde la ecuación (2.28) de la sección 2.2).

El problema con solo condiciones de Neumann en donde el valor de $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ está determinado sobre toda la superficie del dominio de la solución es realmente raro. Sin embargo, notemos que si $\Psi_1(r)$ es una solución de

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi(r) &= 0 \text{ dentro de } D, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= G(r) \text{ sobre el borde de } D;\end{aligned}\tag{2.49}$$

entonces

$$\Psi = \Psi_1 + k,$$

siendo k una constante, también resuelve la ecuación (2.49), para cualquier valor de k . Las soluciones del problema con solo condiciones de Neumann para la ecuación de Laplace están únicamente determinadas salvo constantes. Una explicación de este hecho se debe a que la ecuación (2.49) describe un problema de flujo de calor, pero los únicos datos dados explícitamente se refieren a la razón de cambio del flujo de calor (los valores de $G(r)$), es decir, no hay referencia a los valores de la temperatura. Así, no hay manera de decir que temperatura está siendo tomada cuando el nivel es cero. Por esta razón, Ψ solo está definida, en tales situaciones, dependiendo de una constante.

Ahora vamos a escribir algunas soluciones de la ecuación de Laplace de dos dimensiones aprovechando su similaridad con la ecuación del calor:

$$\begin{aligned}\text{Laplace: } & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0; \\ \text{Calor: } & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0\end{aligned}$$

Ellas serán realmente equivalentes si nosotros cambiamos “ t ” por “ y ” y escogemos la velocidad igual a la unidad imaginaria “ i ” ($i^2 = -1$). De esta forma, ya hemos visto (sección 2.1) que cualquier función, dos veces diferenciable, de la forma $f(x + vt)$ (o $f(x - vt)$) resuelve la ecuación de onda; entonces cualquier función de la forma

$f(x + iy) = f(z)$ resuelve la ecuación de Laplace, si $f(z)$ y su primera y segunda derivada son funciones bien definidas de la variable compleja $z = x + iy$. Estas funciones de variable compleja son el centro de la teoría de las funciones analíticas, y en los ejemplos que discutiremos a continuación presumimos alguna familiaridad con la teoría básica de las funciones analíticas. Cualquier referencia, consultar Saff y Snider [30].

Ejemplo 2.6.1. Consideremos la función analítica $f(z) = z^2$. Su derivada $f'(z) = 2z$ esta realmente bien definida. Entonces como función de x e y satisface la ecuación de Laplace.

Si $z = x + iy$ entonces

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy);$$

y por lo tanto

$$\nabla^2 [z^2] = \nabla^2 [(x^2 - y^2) + i(2xy)] = \nabla^2 (x^2 - y^2) + i\nabla^2(2xy)$$

de esta manera podemos hallar separadamente las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) &= 2x, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2) &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) &= -2y, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2) &= -2 \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) &= 2y, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2xy) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(2xy) &= 2x, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2xy) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\nabla^2 (x^2 - y^2) = 0 \text{ y } \nabla^2(2xy) = 0,$$

lo cual implica que

$$\nabla^2 (z^2) = \nabla^2 [(x^2 - y^2) + i(2xy)] = 0.$$

Este resultado también podría ser expresado como que $f(z) = z^2$ es una función armónica.

Ejemplo 2.6.2. Consideremos ahora la función $f(z) = \log z$. Claramente esta función también es analítica, excepto para los valores donde z es un número real negativo; y su derivada es $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Así

$$f(z) = \log |z| + i \arg z = \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + i \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Aplicando un procedimiento similar al del ejemplo anterior tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

por lo tanto

$$\nabla^2 \left\{ \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right\} = 0,$$

y así se cumple que

$$\nabla^2 \log z = 0,$$

es decir, $f(z) = \log z$ es una función armónica. $\square$

Debería ser claro de estos ejemplos que la parte real y la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$, por separado, satisfacen o resuelven la ecuación de Laplace.

Ejemplo 2.6.3. Consideremos la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Psi = 0$ con las condiciones de borde de Dirichlet indicadas en la figura 2.13; ahora queremos encontrar una función que sea constante para cada círculo, y también armónica entre los círculos que forman el borde de la región que estamos considerando.

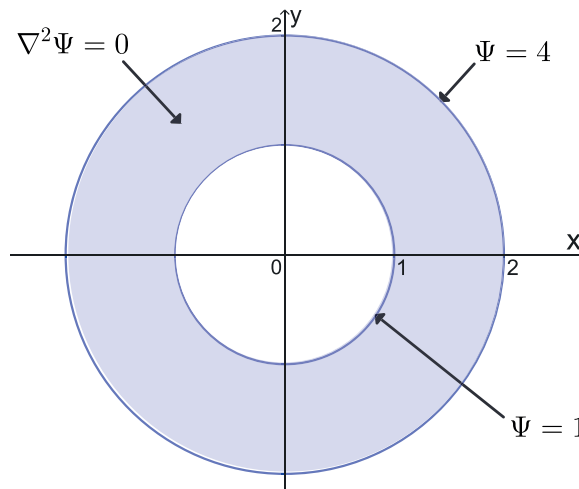


Figura 2.13: Ecuación de Laplace $\nabla^2 \Psi = 0$ con condiciones de borde de Dirichlet.

Sabemos que la coordenada polar $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiene un valor constante en cada círculo centrado en el origen, y por lo tanto también será constante cualquier función que dependa de r ; por otra parte en el ejemplo anterior vimos que la función $\log r$ es armónica, así podemos considerar la función

$$\log r = \operatorname{Re}(\log z)$$

como la que satisface las condiciones que queremos. Además por la naturaleza de la ecuación de Laplace cualquier combinación lineal de la forma

$$\Psi(x, y) = A \log r + B$$

también satisfacerá las condiciones requeridas. Luego sustituyendo los correspondientes valores tenemos el siguiente sistema a resolver:

$$\begin{aligned} A \log 1 + B &= 1 \\ A \log 2 + B &= 4 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos que $B = 1$ y $A = \frac{3}{\log 2}$. Así la solución viene dada por

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \frac{3}{\log 2} \log r + 1 \\ &= \frac{3}{\log 2} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.4. Consideremos las condiciones de Dirichlet demarcadas en los bordes de una cuña, como vemos en la figura 2.14. Vamos a buscar una función armónica que satisfaga tales condiciones, para ello vamos a usar el ángulo en coordenadas polares θ , trasladado al origen $z_0 = 1 + 2i$; ya que cada línea recta en la figura 2.14 está representada en coordenadas polares por θ igual a una constante.

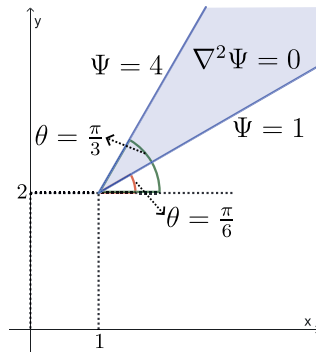


Figura 2.14: Condiciones de Dirichlet en los bordes de una cuña.

La función representada por el ángulo en coordenadas polares $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ es claramente armónica, en esa región, por que ella es la parte imaginaria de la función analítica

$$f(z) = \log(z - z_0).$$

Así, si adaptamos $A\theta + B$ a las condiciones de borde encontraremos que $A = \frac{18}{\pi}$ y $B = -2$, luego la función buscada será

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \frac{18}{\pi} \theta - 2 \\ &= \frac{18}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - 2}{x - 1} \right) - 2. \end{aligned}$$

El hecho de que uno de los bordes de la cuña tienda a infinito y en el cual no hay establecidas condiciones de borde, sugiere la posibilidad de que haya otras soluciones a este problema. En el ejercicio 2.7.3, de la sección 2.7, se vera que este es realmente el caso.

Físicamente, podemos pensar que la figura 2.14 tiende a modelar el perfil del equilibrio de temperatura en una muy larga, pero finita, cuña; y es claro que esa temperatura no será univocamente determinada hasta que no establezcamos control del proceso térmico en la parte de la cuña no acotada. Esto será analizado mas adelante. $\square$

Una de las mas importantes aplicaciones de las funciones analíticas en resolver la ecuación de Laplace es la *fórmula de Poisson*, la cual da los valores de la función armónica Ψ dentro del círculo de radio R centrado en el origen, en término de sus valores $F(R e^{i\theta})$ sobre el borde del círculo,

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \Psi(r e^{i\theta}) \\ &= \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(R e^{i\phi})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi \end{aligned} \quad (2.51)$$

Así la ecuación (2.51) es una fórmula universal de solución para el problema de borde de Dirichlet en el círculo, y si evaluamos esta ecuación en $r = 0$ encontramos que

$$\Psi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R e^{i\phi}) d\phi \quad (2.52)$$

y esta ecuación muestra que el valor de cualquier función armónica en el centro del círculo es igual al promedio de sus valores sobre el borde del mismo. Esta *Propiedad del Valor Medio* reafirma nuestra interpretación del Laplaciano como una medida de la diferencia entre el valor de Ψ y el promedio de los valores de sus puntos vecinos (ver

ecuación (2.45) en la sección 2.4), ya que si $\nabla^2 \Psi = 0$ no hay diferencia.

Ahora suponga que r es un punto interior, en el cual hay un máximo, para la función armónica Ψ .

¿Como puede el valor mas alto de temperatura ser el promedio de los valores de sus puntos vecinos?

La única posibilidad de que esto ocurra es que Ψ tome siempre su mas alto valor en el interior, es decir, Ψ es una temperatura constante. Esto es conocido como el *Principio del Máximo para Funciones Armónicas*.

Definición 2.6.1 (Principio del Máximo para Funciones Armónicas). *Si una función armónica alcanza su máximo o mínimo valor en un punto interior de su dominio, entonces este valor será constante para todo el dominio. Por defecto podemos decir que una función armónica siempre toma sus valores máximos o mínimos sobre el borde del dominio de la función.*

Así es evidente que no puede haber “puntos mas calientes” en el interior de un cuerpo en equilibrio térmico, porque el calor se deslizaría desde esa posición.

Ejemplo 2.6.5. Consideremos los bosquejos de la familia de isoterma que se podrían ver en una posición de equilibrio de una plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente segun se muestra en la figura 2.15

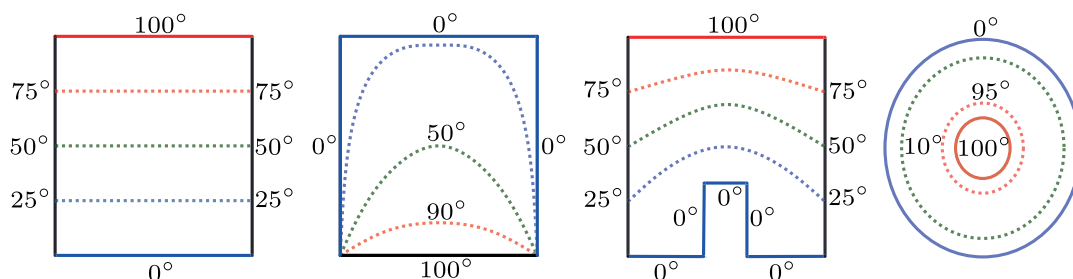


Figura 2.15: Familia de isoterma en una posición de equilibrio de una plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente.

2.7

Ejercicios

Ejercicio 2.7.1. Comprobar que las funciones $f(z) = z^3$ y $g(z) = e^z$ son funciones armónicas.

Ejercicio 2.7.2. Mostrar que la función $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ es armónica en $\mathbb{R}^3$ excepto en el origen.

Ejercicio 2.7.3. Sea la variable compleja $z = x + iy$ y consideremos la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(e^{-\frac{1}{z^4}} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que f satisface la ecuación de Laplace en todo $\mathbb{R}^2$ y que f no es continua en el origen.

Ejercicio 2.7.4.

1. Comprobar que la solución del problema de Dirichlet del ejemplo 2.6.4 es una función armónica.
2. Mostrar que si $\Psi_1(x, y)$ es una solución del ejemplo 2.6.4, entonces también lo es

$$\Psi_1(x, y) + \operatorname{Im} [(z - 2 - i)^4],$$

donde Im representa la parte imaginaria de la expresión compleja correspondiente.

3. Mostrar que si $\Psi_1(x, y)$ es una solución del ejemplo 2.6.4, entonces también lo es

$$\Psi_1(x, y) + C(z - 2 - i)^{4n},$$

para cualquiera constante C y entero positivo n .

Ejercicio 2.7.5. Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace mostrado en la figura 2.16

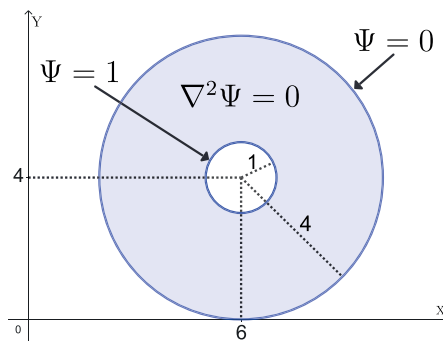


Figura 2.16: Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

Ejercicio 2.7.6.

1. Encontrar una solución a el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace mostrado en la figura 2.17 (Ayuda: utilice una combinación de las funciones complejas $\arg(z - 1)$ y $\arg(z + 1)$).

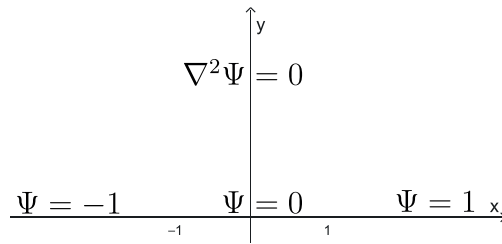


Figura 2.17: Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

2. Mostrar que si $\Psi_1(x, y)$ es una solución del problema de la figura 2.17, entonces también lo es

$$\Psi_1(x, y) + Cy,$$

para cualquier constante C .

Ejercicio 2.7.7. Usando solo su intuición, bosqueje la familia de isoterms que deberíamos esperar ver en la posición de equilibrio de una plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente como se muestra en la figura 2.18. *Cuidado con no violar el Principio del Máximo para funciones armónicas.*

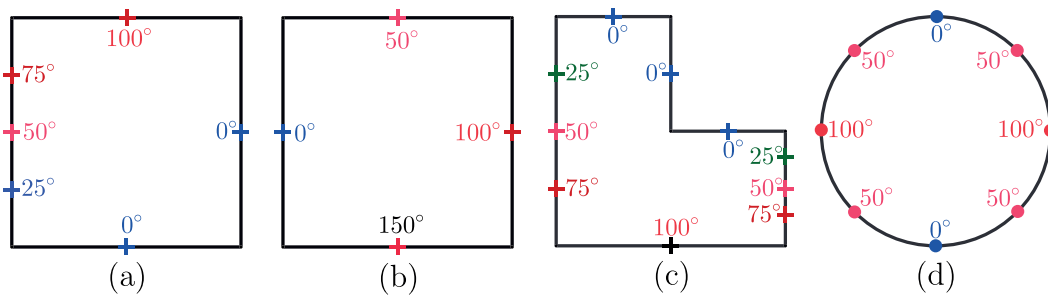


Figura 2.18: Plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente.

2.8

Clasificación de las ecuaciones de segundo orden

Hemos visto que las ecuaciones diferenciales parciales lineales tales como las ecuaciones de onda, calor y Laplace surgen en diversas situaciones físicas, y de ellas podemos anticipar muchas de las cualitativas diferencias entre el comportamiento de sus soluciones. Esto produce que esos aspectos cualitativos y diferencias persistan cuando la ecuación esta modificada en ciertas formas, y pueden clasificarse en clases mas generales de

ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden como “*casi-onda*”, “*casi-calor*” o “*casi-laplace*”.

Las bases para el esquema de clasificación recaen en la similaridad entre la estructura de las respectivas versiones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y la estructura de las ecuaciones de las secciones cónicas. Si nosotros, para la ecuación de segundo orden, hacemos los cambios de $y = vt$ en la ecuación de onda, $y = \eta t$ en la ecuación del calor, y dejamos la ecuación de Laplace intacta, tendremos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación de la onda}), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ecuación del calor}), \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación de Laplace}). \quad (2.55)$$

y comparando estas ecuaciones con las ecuaciones de las secciones cónicas

$$ax^2 - by^2 = c \quad (\text{Hipérbola}), \quad (2.56)$$

$$ax^2 - by = c \quad (\text{Parábola}), \quad (2.57)$$

$$ax^2 + by^2 = c \quad (\text{Elipse}), \quad (2.58)$$

podemos observar similaridad en los signos y exponentes.

Esto nos conduce a presentar la siguiente clasificación: la ecuación de onda es del tipo hiperbólico, la ecuación del calor es del tipo parabólico y la ecuación de Laplace es del tipo elíptico.

Recordemos de la geometría analítica elemental que la ecuación general de una sección cónica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2.59)$$

puede ser reducida a una de la forma (2.56), (2.57), (2.58) mediante una transformación lineal

$$x' = Ax + By, \quad y' = Cx + Dy \quad (2.60)$$

seguida por una substitución de $x'' = x' + E$, $y'' = y' + F$. La forma particular (2.56), (2.57), (2.58) depende sobre el signo del *discriminante* $4(b^2 - ac) = 4\Delta$:

- si $\Delta > 0$ la sección es una hipérbola,
- si $\Delta = 0$ la sección es una parábola,
- si $\Delta < 0$ la sección es una elipse.

De acuerdo a esto podemos generalizar nuestra terminología tal que la ecuación diferencial parcial general de segundo orden en dos variables

$$a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \Psi}{\partial x} + e \frac{\partial \Psi}{\partial y} + f \Psi + g = 0 \quad (2.61)$$

es del tipo hiperbólico, parabólico o elíptico si Δ es positivo, cero o negativo, respectivamente.

Se puede mostrar que la ecuación diferencial parcial (2.61) puede ser reducida, por un cambio de variables lineal (2.60), a una ecuación donde en el lado izquierdo es de la forma (2.53), (2.54), (2.55) de acuerdo al signo del discriminante Δ ; y el lado derecho contiene solo derivadas de Ψ de orden cero o uno.

Una de las conclusiones fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales es que la mayoría de las propiedades importantes de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales lineales depende solo de la forma de los términos de orden superior que aparezcan en la ecuación, en este caso serían los términos de orden dos.

Estos términos forman lo que es conocido como la *parte principal de la ecuación*. Así la parte principal de la ecuación diferencial parcial (2.61) será

$$P \left(x, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (2.62)$$

Ahora es posible escoger un cambio de variables lineal del tipo (2.60)

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (2.63)$$

de tal manera que las nuevas funciones u y v sean localmente invertibles, además de clase C^2 y su Jacobiano distinto de cero, es decir,

$$J = u_x v_y - u_y v_x \neq 0.$$

Utilizando la regla de la cadena y agrupando los correspondientes términos transformamos la parte principal (2.62) en la ecuación de la forma

$$\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} + \gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + R \quad (2.64)$$

donde R indica términos de orden cero o uno, lo cual implica que la parte principal de la ecuación transformada es

$$\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} + \gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \quad (2.65)$$

donde

$$\alpha = a \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u^2}{\partial y} \quad (2.66)$$

$$\beta = a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + b \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + c \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.67)$$

$$\gamma = a \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2b \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (2.68)$$

Luego haciendo uso de las ecuaciones (2.66), (2.67) y (2.68) podemos establecer la importante relación

$$\beta^2 - \alpha\gamma = (b^2 - ac) (u_x v_y - u_y v_x)^2 \quad (2.69)$$

o

$$\Delta' = \Delta J^2 \quad (2.70)$$

donde Δ' es el discriminante de la ecuación diferencial parcial en las nuevas coordenadas u y v .

Ahora podemos considerar la ecuación

$$az_x^2 + 2bz_x z_y + cz_y^2 = 0 \quad \text{o} \quad P(x, z_x) = 0,$$

la cual es llamada la *ecuación característica* de la ecuación diferencial parcial general de segundo orden en dos variables (2.61); y las curvas de nivel $z(x, y) = \text{constante}$, que satisfacen la ecuación característica reciben el nombre de *curvas características* o simplemente *características*.

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema que nos será de utilidad para resolver algunos problemas.

Teorema 2.8.1. *La curva de nivel $z(x, y) = \text{constante}$, es una característica de la ecuación (2.61) sí y sólo sí dicha curva de nivel es una solución de la ecuación*

$$a \frac{\partial y^2}{\partial s} - 2b \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + c \frac{\partial x^2}{\partial s} = 0 \quad (2.71)$$

la cual es equivalente a

$$a \frac{\partial y^2}{\partial x} - 2b \frac{\partial y}{\partial x} + c = 0. \quad (2.72)$$

La demostración de este teorema no es la intención de este libro, pero el lector interesado puede revisar DuChateau y Zachmann [14]. Sin embargo, notemos que al resolver la ecuación de segundo grado presente en (2.72) se tendrá que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Ejemplo 2.8.1.

1. Sea la ecuación

$$2\Psi_{xx} - 6\Psi_{xy} - 8\Psi_{yy} + \Psi_x = 0.$$

Claramente vemos que $a = 2$, $b = 3$, $c = -8$, así el discriminante $\Delta = 25 > 0$ por lo que la ecuación será hiperbólica. Ahora utilizaremos el teorema 2.8.1 y su consecuencia para ver que $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \pm 5}{2}$ lo cual nos da dos soluciones 4 y -1 .

Ahora resolviendo la ecuación diferencial de variables separables obtenemos las soluciones lineales

$$4x - y = \text{cte} \text{ y } x + y = \text{cte},$$

las cuales son las características de la ecuación.

2. Sea la ecuación

$$e^{2x} \Psi_{xx} + 2e^{x+y} \Psi_{xy} + e^{2y} \Psi_{yy} = 0.$$

En este caso se tiene $a = e^{2x}$, $b = e^{x+y}$, $c = e^{2y}$, luego

$$\Delta = (e^{x+y})^2 - e^{2x}e^{2y} = 0$$

y por lo tanto la ecuación es parabólica. Para hallar las características debemos resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{e^{2x}} = \frac{e^y}{e^x}$$

la cual nos da la solución

$$e^{-x} - e^{-y} = \text{constante}.$$

Note que si la derivada mixta $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$ no esta presente, entonces la clasificación es inmediata; así la ecuación es hiperbólica si las segundas derivadas parciales

tienen signos opuestos, y es elíptica si tienen signos iguales. Por otra parte si una de las segundas derivadas parciales no está presente entonces es parabólica.

Ejemplo 2.8.2. Consideremos la ecuación de Tricomi

$$\Psi_{xx} + y\Psi_{yy} = 0,$$

para un flujo transónico. Claramente $a = 1$, $b = 0$, $c = y$, por lo cual

$$\Delta = -y;$$

de esta manera tenemos que si $y > 0$ es elíptica y si $y < 0$ es hiperbólica. También podemos decir que si $y = 0$ es parabólica. $\square$

Estas notaciones son extendidas a ecuaciones en dimensión superior; así la ecuación general diferencial parcial lineal de segundo orden para n variables puede ser escrita como

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + c\Psi + d = 0 \quad (2.73)$$

Esta es elíptica en cualquier punto donde pueda ser reducida por un cambio de variables lineal a la forma

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (\text{ó} = \text{una derivada de primer orden}), \quad (2.74)$$

es hiperbólica si es de la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (\text{ó} = \text{una derivada de primer orden}), \quad (2.75)$$

donde la variable x_n , es llamada “*casi-tiempo*” y las otras $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ son llamadas “*casi-espacio*”; la ecuación es parabólica cuando la forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{o} \quad (= \text{una derivada de primer orden}), \quad (2.76)$$

es alcanzada; nuevamente x_n , es llamada “*casi-tiempo*” y las otras son llamadas “*casi-espacio*”, esta definición de “*casi*” es un tanto extraña pero trata de indicar las correspondientes formas de las ecuaciones de la onda y calor.

La importancia de este esquema de clasificación radica en que todas las ecuaciones de un mismo tipo tienen algunos aspectos cualitativos en común. Por ejemplo, recordemos de la sección 2.1, que para la ecuación de onda los valores de los datos iniciales en un

punto x_0 , no influyen en los valores de la solución en (x, t) si $|x - x_0| > vt$. Este efecto es completamente general, así cada ecuación hiperbólica tiene una velocidad de propagación máxima la cual limita la extensión a la cual los datos iniciales pueden influenciar la solución un tiempo posterior. Por otra parte todas las ecuaciones parabólicas tienen velocidad de propagación infinita, como la ecuación del calor, sección 2.4.

Un aspecto compartido por todas las ecuaciones elípticas es su suavidad. También recuerde que soluciones de la ecuación de Laplace de dos dimensiones puede ser visualizada como la forma de equilibrio de una membrana estirada de un lado al otro del anillo o borde de un tambor (sección 2.6). Discontinuidades en los datos de borde o frontera son inmediatamente suavizados, en el interior de la región donde está definida la solución o región solución, por la ecuación de Laplace y también por todas las ecuaciones del tipo elíptico (a menos que los coeficientes en la ecuación misma sean discontinuos).

El tema final que discutiremos es la naturaleza de las condiciones auxiliares que son añadidas a cada tipo de ecuación. Típicamente ellas corresponden a lo que hemos visto para las ecuaciones de Laplace, calor y onda.

La ecuación elíptica está acompañada por condiciones de borde, donde o Ψ o su derivada parcial $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ o una combinación lineal de ambas son especificadas por todo el borde de la región solución (Dirichlet, Neumann o Robin). En una ecuación parabólica uno impone una condición inicial, en donde $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ es especificada sobre un hiperplano $x_n = 0$ de la variable “casi-tiempo” x_n ; para una ecuación hiperbólica uno también especifica la derivada $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sobre ese hiperplano. En estos dos últimos casos también son impuestas condiciones de Dirichlet, Neumann o Robin sobre los “casi-espacio” bordes de la región solución.

Hemos usado la palabra típicamente, ya que si bien es verdad que otras condiciones auxiliares pueden ser impuesta matemáticamente, estas pueden conducir a soluciones que son físicamente sin sentido. A este respecto uno dice que una ecuación diferencial parcial y sus condiciones auxiliares comprenden un problema bien planteado si las siguientes tres condiciones son satisfechas:

1. existe una solución del problema,
2. la solución es única, y
3. la solución depende continuamente de los datos auxiliares. Esto último quiere decir, que si nosotros alteramos las condiciones iniciales o de borde una porción suficientemente pequeña, entonces las soluciones pueden no diferir drásticamente.

Ejemplo 2.8.3. Consideremos el problema representado en la figura 2.19 y veamos

porque las condiciones de borde de Dirichlet son inapropiadas para las ecuaciones hiperbólicas.

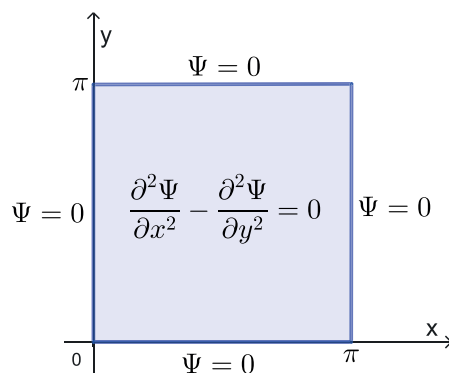


Figura 2.19: Condiciones de borde de Dirichlet son inapropiadas para las ecuaciones hiperbólicas.

Si la ecuación gobernante fuese la ecuación de Laplace, entonces la solución Ψ podría interpretarse como la temperatura en estado estacionario sobre una plancha conductora cuyos bordes estaban mantenidos a cero grados; y la única posible solución, claramente, sería $\Psi(x, y) = 0$. Pero la ecuación hiperbólica mostrada en la figura 2.19 tiene infinitas soluciones

$$\Psi(x, y) = k \sin(nx) \sin(ny)$$

para cualquier constante k y cualquier entero n . Fácilmente podemos comprobar que estas soluciones satisfacen la ecuación y todas las condiciones de borde del problema de la figura 2.19. $\square$

Aunque hay otros aspectos de clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales, nosotros hemos mostrado las características principales de las mas importantes ecuaciones de la física y la ingeniería, y en el próximo capítulo comenzaremos la discusión de los métodos de solución.

2.9

Ejercicios

Ejercicio 2.9.1. Encontrar las características de las siguientes ecuaciones:

1. $\Psi_{xx} - \Psi_y + \Psi = 0$

3. $\Psi_{xx} - \Psi_{yy} + \Psi_x + \Psi_y = 0$

2. $\Psi_{xx} + y\Psi_{yy} = 0$

4. $\Psi_{xx} - y^2\Psi_{yy} = 0$

Ejercicio 2.9.2. Determinar en que puntos o región las siguientes ecuaciones son hiperbólicas, parabólicas y elípticas:

1. $3\Psi_{xx} + 4\Psi_{xy} + 2\Psi_{yy} - \Psi = 0$
2. $\Psi_{xx} + 2x\Psi_{xy} + \Psi_{yy} + \sin(xy)\Psi = 0$
3. $e^y\Psi_{xx} - 2\Psi_{xy} + x\Psi_{yy} + y^2\Psi_x + \Psi = 0$
4. $\Psi_{xx} + (1+y)^2\Psi_{yy} = 0$

Ejercicio 2.9.3. Considere la ecuación de segundo orden $\Psi_{xx} + c\Psi_{yy} = 0$, donde c es una constante. Determinar el tipo de ecuación y bosquejar sus curvas características para $c = -4, -1, -1/10, 0$ y 1 .

Ejercicio 2.9.4. Comprobar que la solución al ejemplo 2.8.3 satisface el problema planteado.

Ejercicio 2.9.5. Dado el problema elíptico de la ecuación de Laplace $\nabla^2\Psi = 0$ en la región del semiplano superior ($y \geq 0$), con las condiciones iniciales

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, 0) = 0.$$

Comprobar que la función

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

es solución del problema.

¿Que sucederá si n aumenta grandemente su valor?

Ejercicio 2.9.6. Supongamos que $\Psi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace. Realice un cambio de variable primeramente alargando el eje Y por un factor de 3; y luego rote el nuevo eje 30° . ¿Que ecuación diferencial satisface la función derivada

$$\Psi^*(x', y') = \Psi[x(x', y'), y(x', y')] ?$$

Verificar, evaluando el discriminante, que ella sigue siendo elíptica. (Ayuda: Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables).

Ejercicio 2.9.7. Repita el análisis del ejercicio anterior para las ecuaciones de onda y del calor.



3

El Método de separación de variables

En este capítulo introduciremos la mas importante técnica en ingeniería para la solución de ecuaciones diferenciales parciales: la separación de variables. La realización exitosa de este procedimiento para un conjunto de condiciones de borde dados puede ser bastante largo, porque tres procedimientos matemáticos diferentes están involucrados:

1. el uso de superposición para descomponer un complicado problema en un conjunto de problemas mas sencillos;
2. la separación de la ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias dentro de un apropiado sistema de coordenadas; y
3. la construcción de expansiones en autofunciones (generalizaciones de las series de Fourier) que satisfacen las condiciones de borde.

Los puntos 1 y 2 serán analizados en este capítulo y el punto 3 será expuesto en el próximo capítulo.

3.1

Metodología de la separación de variables

La idea general del procedimiento de separación de variables es dividir la solución del problema principal en subproblemas, donde para cada uno de ellos las condiciones de borde son homogéneas a excepción de una de ellas. Así, las fórmulas para la solución de un subproblema son series infinitas, en donde términos individuales satisfacen las ecuaciones homogéneas mientras que la suma general cumple la restante condición no homogénea.

Para entender bien el proceso general, comencemos con un ejemplo donde mostraremos la fórmula de la solución y analizaremos sus aspectos.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos el problema mostrado en la figura 3.1,

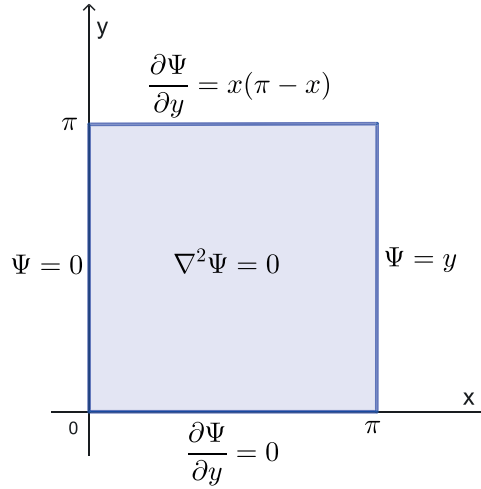


Figura 3.1: Plancha de metal con temperatura Ψ .

y si concebimos la incógnita Ψ como la temperatura, tenemos una plancha de metal de dos dimensiones en la cual Ψ está especificada sobre dos lados (variando “ x ”)

$$\Psi(0, y) = 0 \quad (3.1)$$

$$\Psi(\pi, y) = y, \quad (3.2)$$

y el flujo del calor está especificado en los restantes dos lados (variando “ y ”)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \pi) = x(\pi - x). \quad (3.4)$$

Así tenemos condiciones de borde de Dirichlet y Neumann; y la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi) \quad (3.5)$$

indica que estamos buscando la temperatura en un estado estacionario.

El método de separación de variables, el cual discutiremos más adelante, nos genera la siguiente fórmula para la solución de las ecuaciones (3.1)-(3.5)

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \frac{x}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)x}{\sinh(2n+1)\pi} \frac{\cos(2n+1)y}{(2n+1)^2} \\ & + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^4} \frac{\cosh(2n+1)y}{\sinh(2n+1)\pi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora veamos, en primer lugar que cada término en la fórmula (3.6) es una solución de la ecuación de Laplace (3.5); omitiendo los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi &= 0, \\ \nabla^2 \sinh(2n+1)x \cosh(2n+1)y &= (2n+1)^2 \sinh(2n+1)x \cos(2n+1)y \\ &\quad - (2n+1)^2 \sinh(2n+1)x \cos(2n+1)y \\ &= 0 \\ \nabla^2 \sin(2n+1)x \cosh(2n+1)y &= -(2n+1)^2 \sin(2n+1)x \cosh(2n+1)y \\ &\quad + (2n+1)^2 \sin(2n+1)x \cosh(2n+1)y \\ &= 0\end{aligned}$$

Por otra parte, como los factores

$$x, \sinh(2n+1)x \text{ y } \sin(2n+1)x,$$

toman el valor cero cuando $x = 0$, entonces se satisface la condición en la cara izquierda de la plancha (ecuación (3.1)). Similarmente la derivada evaluada en $y = 0$ vale cero, para los factores

$$x, \cos(2n+1)y \text{ y } \cosh(2n+1)y,$$

es decir, el flujo es cero en la cara inferior (ecuación (3.3)). Luego las ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.5) son satisfechas término a término. Recordemos que aquí estamos usando el principio fundamental de las ecuaciones lineales homogéneas de que cualquier combinación lineal de soluciones es también una solución.

Además, si ahora consideramos la temperatura en la cara derecha, la ecuación (3.6) nos da como resultado

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)\pi}{\sinh(2n+1)\pi} \frac{\cos(2n+1)y}{(2n+1)^2} \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)^4} \frac{\cosh(2n+1)y}{\sinh(2n+1)\pi}\end{aligned}\tag{3.7}$$

o, simplificando y puesto que los términos de la segunda serie son cero

$$\Psi(x, y) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)y}{(2n+1)^2}\tag{3.8}$$

donde la expresión del lado derecho es la expansión en serie de Fourier de cosenos de la función $f(y) = y$, por lo tanto queda satisfecha la condición de la cara derecha.

Similarmente, ahora el flujo sobre la cara superior viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)x}{\sinh(2n+1)\pi} \frac{\sin(2n+1)\pi}{2n+1} \\ &+ \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \frac{\sinh(2n+1)\pi}{\sinh(2n+1)\pi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

simplificando y utilizando el hecho de que $\sin(2n+1)\pi$ vale cero tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \quad (3.10)$$

la cual vemos que es la expansión en serie de Fourier de senos de la función que estamos considerando $g(x) = x(\pi - x)$, luego queda satisfecha la condición de borde en el lado superior de la plancha.

Resumamos lo que hasta ahora hemos hecho. En primer lugar hemos demostrado que la solución $\Psi(x, y)$ puede ser dividida en dos partes $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, con

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \frac{x}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)x}{\sinh(2n+1)\pi} \frac{\cos(2n+1)y}{(2n+1)^2} \\ \Psi_2(x, y) &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^4} \frac{\cosh(2n+1)y}{\sinh(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

donde la función Ψ_1 resuelve el subproblema de la figura 3.2(a), en el cual la condición no homogénea de Neumann sobre la cara superior ha sido reemplazada por su correspondiente forma homogénea;

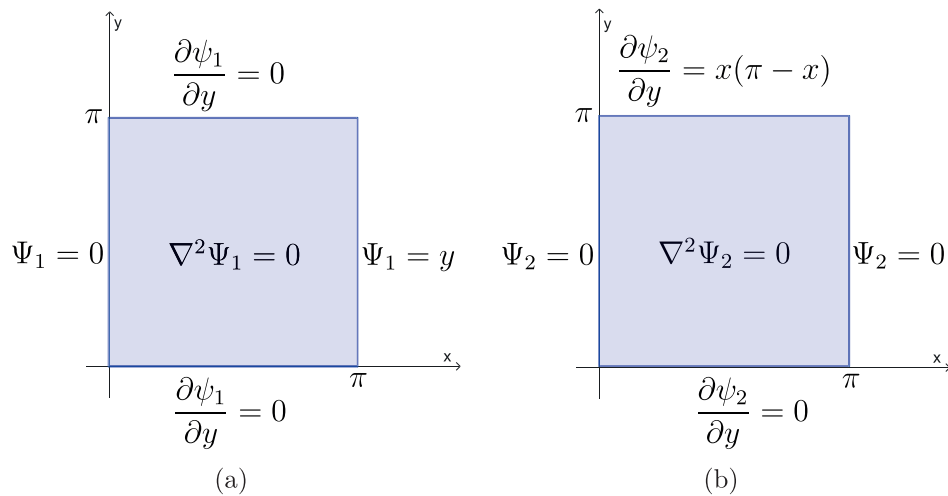


Figura 3.2: Subproblemas.

y similarmente la Ψ_2 resuelve el subproblema de la figura 3.2(b), donde la condición original de Dirichlet, no homogénea, en la cara derecha ha sido cambiada por su equivalente homogénea.

Así, la ecuación (3.6) sugiere que el problema original sea descompuesto en dos subproblemas, en donde todas menos una de las condiciones gobernantes son homogéneas. Este es un paso esencial dentro del procedimiento de separación de variables.

Un segundo aspecto que vemos en la ecuación (3.6) es el hecho de que las condiciones homogéneas para cada subproblema son satisfechas por términos individuales, en cambio para la condición no homogénea la suma completa es la que verifica su cumplimiento. En general, podemos decir que, el plan básico dentro del procedimiento de separación de variables es la recopilación de un conjunto de soluciones a el subconjunto de ecuaciones homogéneas y luego reunir las dentro de una suma satisfaciendo la ecuación no homogénea.

Ejemplo 3.1.2. Consideremos el problema planteado en la figura 3.3.

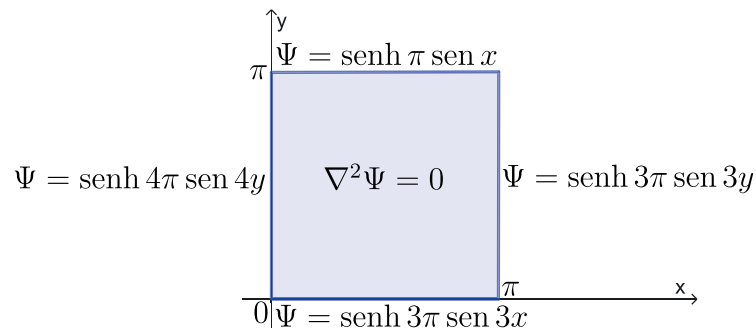


Figura 3.3: Problema planteado.

Veamos que lo podemos dividir en cuatro subproblemas, ver figura 3.4,

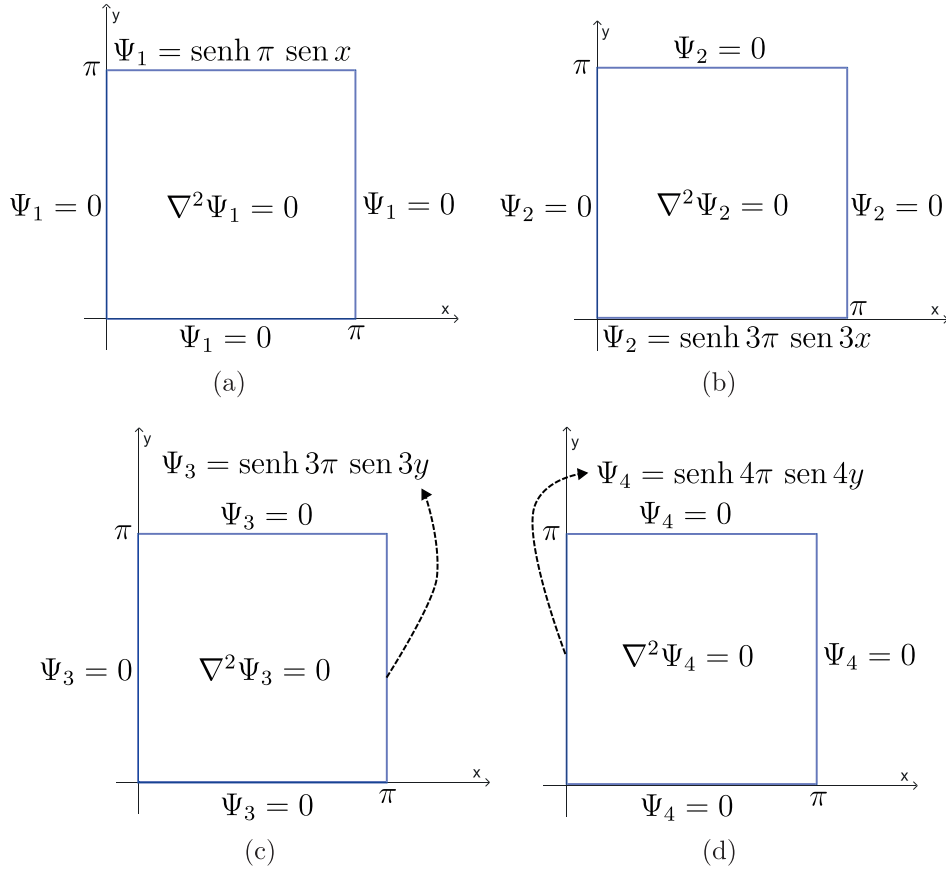


Figura 3.4: Subproblemas.

y además podemos verificar que la función

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

satisface todas las condiciones de borde planteadas y que cada una de las Ψ_i satisface el correspondiente subproblema.

Comencemos definiendo las ecuaciones Ψ_i ; para cada subproblema, tomando primero las condiciones en el eje y , y luego en el eje x :

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \sin x \sinh y, & \Psi_2(x, y) &= \sin 3x \sinh 3(\pi - y), \\ \Psi_3(x, y) &= \sinh 3x \sin 3y, & \Psi_4(x, y) &= \sinh 4(\pi - x) \sin 4y. \end{aligned}$$

Así la ecuación Ψ_1 resuelve el subproblema de la figura 3.4(a)

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) &= \sin x \sinh 0 = 0, \\ \Psi_1(x, \pi) &= \sin x \sinh \pi = \sinh \pi \sin x, \\ \Psi_1(0, y) &= \sinh 0 \sinh y = 0, \\ \Psi_1(\pi, y) &= \sin \pi \sinh y = 0. \end{aligned}$$

la ecuación Ψ_2 resuelve el subproblema de la figura 3.4(b)

$$\begin{aligned}\Psi_2(x, 0) &= \sin 3x \sinh 3(\pi - 0) = \sinh 3\pi \sin 3x, \\ \Psi_2(x, \pi) &= \sin 3x \sinh 3(\pi - \pi) = 0, \\ \Psi_2(0, y) &= \sin 3 \cdot 0 \sinh 3(\pi - y) = 0, \\ \Psi_2(\pi, y) &= \sin 3\pi \sinh 3(\pi - y) = 0.\end{aligned}$$

la ecuación Ψ_3 resuelve el subproblema de la figura 3.4(c)

$$\begin{aligned}\Psi_3(x, 0) &= \sinh 3x \sin 3(0) = 0, \\ \Psi_3(x, \pi) &= \sinh 3x \sin 3(\pi) = 0, \\ \Psi_3(0, y) &= \sinh 3(0) \sin 3y = 0, \\ \Psi_3(\pi, y) &= \sinh 3\pi \sin 3y = 0.\end{aligned}$$

la ecuación Ψ_4 resuelve el subproblema de la figura 3.4(d)

$$\begin{aligned}\Psi_4(x, 0) &= \sinh 4(\pi - x) \sin 4(0) = 0, \\ \Psi_4(x, \pi) &= \sinh 4(\pi - x) \sin 4(\pi) = 0, \\ \Psi_4(0, y) &= \sinh 4(\pi - 0) \sin 4y = \sinh 4\pi \sin 4y, \\ \Psi_4(\pi, y) &= \sinh 4(\pi - \pi) \sin 4y = 0.\end{aligned}$$

luego vemos que al agruparlas la función

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

cumple con lo que estamos buscando.

3.2

Proceso de separación de variables

La ecuación de Laplace en dos dimensiones admite soluciones en la forma separada de $F(x)G(y)$, donde típicamente uno de estos factores es un seno o coseno y el otro es un seno o coseno hiperbólico. El método de separación de variables, que nos permitirá establecer estas soluciones, lo enfocaremos en primer lugar mediante un ejemplo donde tendremos involucradas solamente condiciones de borde de Dirichlet.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos la plancha cuadrada de un material de conductividad térmica mostrada en la figura 3.5, en donde analizaremos el cálculo del estado estable

de distribución de temperatura.

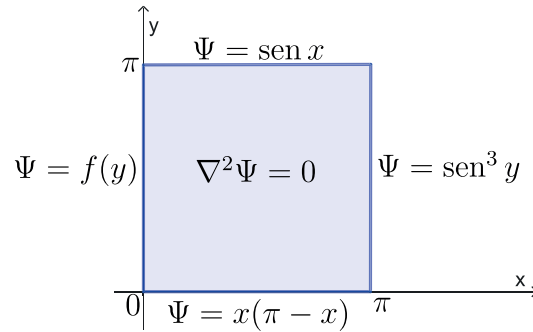


Figura 3.5: Plancha cuadrada de un material de conductividad térmica.

En la figura 3.5 tenemos un cuadrado de dimensiones π por π (por conveniencia). La temperatura en cada una de las caras es mantenida por una fuente externa de calor que viene dada por las ecuaciones:

$$\Psi(x, \pi) = \sin x \quad (0 < x < \pi) \quad (3.11)$$

$$\Psi(x, 0) = x(\pi - x) \quad (0 < x < \pi) \quad (3.12)$$

$$\Psi(\pi, y) = \sin^3 y \quad (0 < y < \pi) \quad (3.13)$$

$$\Psi(0, y) = f(y) \quad (0 < y < \pi) \quad (3.14)$$

donde $f(y)$ es una función dada que no precisaremos ahora y dejaremos abierta su selección. Además dentro del cuadrado el estado estable de temperatura satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = 0 \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi) \quad (3.15)$$

La ecuación diferencial parcial (3.15) junto con las condiciones de borde (3.11)-(3.14) determinan nuestro problema físico.

Subproblemas

En primer lugar, como mencionamos en la sección anterior, dividimos el problema en 4 subproblemas (ver figura 3.6):

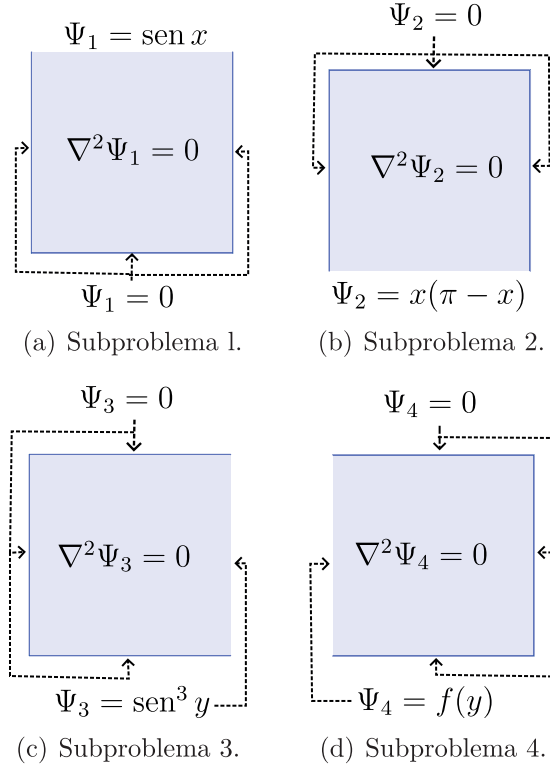


Figura 3.6: Subproblemas.

Subproblema 1. Encontrar $\Psi_1(x, y)$ tal que

$$\nabla^2 \Psi_1(x, y) = 0 \text{ dentro del cuadrado,} \quad (3.16)$$

$$\Psi_1(x, \pi) = \text{sen } x \text{ en la cara superior } (0 < x < \pi), \quad (3.17)$$

$$\Psi_1(x, y) = 0 \text{ en las otras caras.} \quad (3.18)$$

Subproblema 2. Encontrar $\Psi_2(x, y)$ tal que

$$\nabla^2 \Psi_2(x, y) = 0 \text{ dentro del cuadrado,} \quad (3.19)$$

$$\Psi_2(x, 0) = x(\pi - x) \text{ en la cara inferior } (0 < x < \pi), \quad (3.20)$$

$$\Psi_2(x, y) = 0 \text{ en las otras caras.} \quad (3.21)$$

Subproblema 3. Encontrar $\Psi_3(x, y)$ tal que

$$\nabla^2 \Psi_3(x, y) = 0 \text{ dentro del cuadrado,} \quad (3.22)$$

$$\Psi_3(\pi, y) = \text{sen}^3 y \text{ en la cara derecha } (0 < y < \pi), \quad (3.23)$$

$$\Psi_3(x, y) = 0 \text{ en las otras caras.} \quad (3.24)$$

Subproblema 4. Encontrar $\Psi_4(x, y)$ tal que

$$\nabla^2 \Psi_4(x, y) = 0 \text{ dentro del cuadrado,} \quad (3.25)$$

$$\Psi_4(0, y) = f(y) \text{ en la cara izquierda } (0 < y < \pi), \quad (3.26)$$

$$\Psi_4(x, y) = 0 \text{ en las otras caras.} \quad (3.27)$$

Por lo tanto, requerimos que

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

resuelva el problema original; y así podemos ver que

$$\Psi(x, \pi) = \sin x + 0 + 0 + 0 = \sin x \quad \text{en la cara superior,}$$

$$\Psi(x, 0) = 0 + x(\pi - x) + 0 + 0 = x(\pi - x) \quad \text{en la cara inferior,}$$

$$\Psi(\pi, y) = 0 + 0 + \sin^3 y + 0 = \sin^3 y \quad \text{en la cara derecha,}$$

$$\Psi(0, y) = 0 + 0 + 0 + f(y) = f(y) \quad \text{en la cara izquierda,}$$

y dentro del cuadrado

$$\nabla \Psi = \nabla^2 \Psi_1 + \nabla^2 \Psi_2 + \nabla^2 \Psi_3 + \nabla^2 \Psi_4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Así la función Ψ cumple todo lo que se le requirió, es decir, resuelve el problema planteado por las ecuaciones (3.11)–(3.15). $\square$

La idea básica de la separación de variables gira alrededor de encontrar una solución Ψ que pueda ser expresada como el producto de dos factores, donde cada uno depende de una sola variable:

$$\Psi(x, y) = F(x)G(y), \quad (3.28)$$

y al sustituir (3.28) en la ecuación (3.15) obtenemos

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0,$$

la cual es equivalente a

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}, \quad (3.29)$$

de esta forma podemos decir que hemos separado la ecuación diferencial.

Analícemos un poco lo que la ecuación (3.29) nos indica. Podemos ver que el lado izquierdo de la ecuación depende de la variable “ x ” y el lado derecho no, así el lado izquierdo debe ser constante; en otras palabras si nosotros cambiamos el valor de la

variable “ x ” de $x = x_0$ a $x = x_1$, vemos que el lado derecho de la ecuación no va a variar. Por lo tanto, si una función de “ x ” no varia al cambiar el valor de la variable, dicha función es constante.

Esto nos conduce a separar la ecuación (3.29) en dos ecuaciones, cada una de ellas dependiendo de una sola variable

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad \text{o} \quad F''(x) = \lambda F(x) \quad (3.30)$$

$$\frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \quad \text{o} \quad G''(x) = -\lambda G(x) \quad (3.31)$$

en donde λ es conocida como la *constante de separación*.

Las ecuaciones (3.30)–(3.31) tienen la forma de la ecuación del oscilador armónico, cuyas soluciones fueron vistas en la sección 1.5.

Utilizando las soluciones de la ecuaciones anteriores, vamos a resolver cada uno de los subproblemas planteados, en los cuales solo una condición de borde es no homogénea.

Subproblema 1 (Solución). La ecuación a separar es

$$\Psi_1(x, y) = F(x) G(y),$$

luego las soluciones de (3.30) tendrán la forma

$$F(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x \quad \text{si } \lambda > 0, \quad (3.32)$$

$$F(x) = c_3 + c_4 x \quad \text{si } \lambda = 0, \quad (3.33)$$

$$F(x) = c_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_6 \sin \sqrt{-\lambda} x \quad \text{si } \lambda < 0, \quad (3.34)$$

Las equivalentes soluciones para (3.31) son

$$G(y) = d_1 \cos \sqrt{\lambda} y + d_2 \sinh \sqrt{\lambda} y \quad \text{si } \lambda > 0, \quad (3.35)$$

$$G(y) = d_3 + d_4 y \quad \text{si } \lambda = 0, \quad (3.36)$$

$$G(y) = d_5 \cosh \sqrt{-\lambda} y + d_6 \sinh \sqrt{-\lambda} y \quad \text{si } \lambda < 0, \quad (3.37)$$

Ahora que ya tenemos la forma de las soluciones debemos buscar la manera de manipular las constantes para satisfacer las ecuaciones de borde (3.17)–(3.18) (ver figura 3.6(a)). Comencemos utilizando la ecuación (3.18) y expresándola en

la forma separada para $x = 0$, $x = \pi$ $y = 0$,

$$\begin{aligned} F(0) G(y) &= 0, \\ F(\pi) G(y) &= 0, \\ F(x) G(0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

notemos que si tratamos de satisfacer la primera ecuación, tendremos las dos posibilidades $F(0) = 0$ o $G(y) = 0$. Si consideramos la posibilidad $G(y) = 0$ entonces la ecuación se satisfecerá para todo y , y por lo tanto la solución que habremos encontrado será la solución nula. Este no es el caso que nos ayudara a encontrar la solución que queremos. Luego, consideremos la posibilidad $F(0) = 0$, la cual solo estará restringida al valor de $x = 0$.

De esta manera las restricciones en (3.38) pueden ser satisfechas por

$$F(0) = 0, \quad F(\pi) = 0, \quad G(0) = 0. \tag{3.39}$$

Ahora, si imponemos la primera restricción de (3.39) sobre la formas generales de la solución (3.32)-(3.33)-(3.34), obtenemos

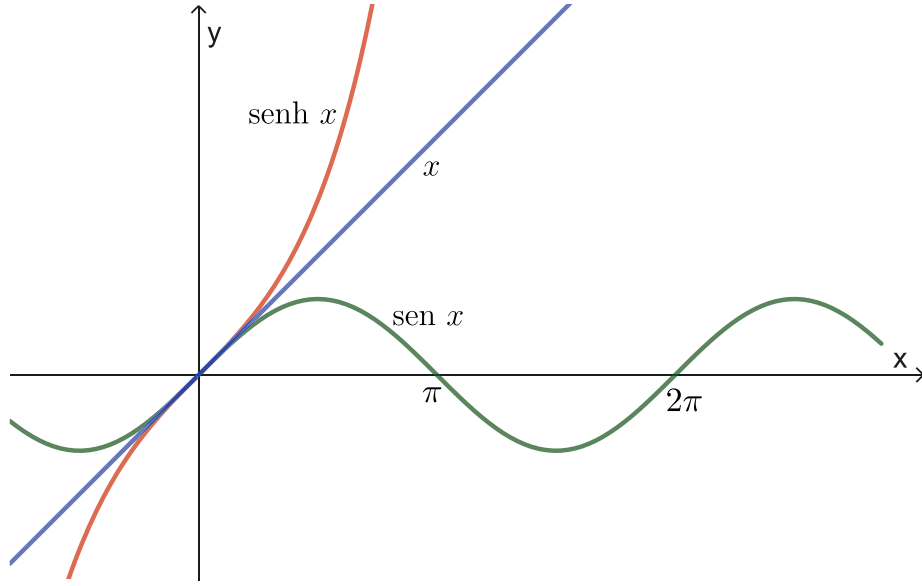
$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \cosh 0 + c_2 \sinh 0 = c_1 \Rightarrow F(x) = c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x \quad \text{si } \lambda > 0, \\ 0 &= c_3 + c_4 \cdot 0 = c_3 \Rightarrow F(x) = c_4 x \quad \text{si } \lambda = 0, \\ 0 &= c_5 \cos 0 + c_6 \sin 0 = c_5 \Rightarrow F(x) = c_6 \sin \sqrt{-\lambda} x \quad \text{si } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Luego tratamos de satisfacer la segunda restricción de (3.39) y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= c_2 \sinh \sqrt{\lambda} \pi \quad \text{si } \lambda > 0, \\ 0 &= c_4 \pi \quad \text{si } \lambda = 0, \\ 0 &= c_6 \sin \sqrt{-\lambda} \pi \quad \text{si } \lambda < 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dado que nuestro interés son las soluciones no triviales, debemos considerar entonces los diferentes casos para la constante de separación λ , en vez de los coeficientes, para satisfacer (3.40).

Ahora bien, si consideramos las gráficas de las funciones $\sinh x$, x , $\sin x$; podemos ver (figura 3.7) que solo $\sin x$ se anula para $x = \pi$; por lo tanto de la primera y segunda ecuación de (3.40) inferimos que $c_2 = 0$ y $c_4 = 0$.

Figura 3.7: Funciones $\sinh x$, x y $\sin x$.

Sin embargo, hay un número infinito de valores negativos de λ que satisfacen (3.40), a saber, $\lambda = -n^2$

$$\begin{aligned}\sin \sqrt{-\lambda} \pi &= \sin \sqrt{-(-n^2)} \pi \\ &= \sin n\pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, para $\lambda = -1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots$ tendremos soluciones no triviales a la ecuación (3.30) con las dos primeras restricciones de (3.39); las cuales son de la forma

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \sin x \quad (\lambda = -1) \\ F_2(x) &= \sin 2x \quad (\lambda = -4) \\ F_3(x) &= \sin 3x \quad (\lambda = -9) \\ &\vdots \\ F_n(x) &= \sin nx \quad (\lambda = -n^2) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{3.41}$$

y cualquier múltiplo constante de ellas.

La última restricción en (3.39) será aplicable a la función correspondiente que depende de “ y ”, y en este caso la función asociada al caso $\lambda < 0$ es la ecuación (3.37)

$$G(y) = d_5 \cosh \sqrt{-\lambda} y + d_6 \sinh \sqrt{-\lambda} y;$$

por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= d_5 \cosh 0 + d_6 \sinh 0 = d_5 \\ \Rightarrow \quad G(y) &= d_6 \sinh \sqrt{-\lambda} y, \end{aligned}$$

y de forma equivalente, para $\lambda = -n^2$, las soluciones serán de la forma

$$G_n(y) = \sinh ny \quad (\lambda = -n^2), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.42)$$

y cualquier múltiplo constante de ellas.

De esta forma, combinando las ecuaciones (3.41) y (3.42), tenemos una serie infinita de soluciones de la ecuación (3.16), las cuales satisfacen las condiciones homogéneas (3.18)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \alpha_1 \sen x \sinh y \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha_2 \sen 2x \sinh 2y \\ \varphi_3(x, y) &= \alpha_3 \sen 3x \sinh 3y \\ &\vdots \\ \varphi_n(x, y) &= \alpha_n \sen nx \sinh ny \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.43)$$

en donde los α_i son constantes cualesquiera.

Ahora, utilizando la última condición de borde $\Psi_1(x, \pi) = \sen x$ (no homogénea), podemos determinar la constante para la solución final. Dada la forma de Ψ_1 , vemos que en la serie (3.43), n toma únicamente el valor de 1, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \pi) &= \alpha_1 \sen x \sinh \pi \\ &= \sen x \\ \Rightarrow \quad \alpha_1 &= \frac{1}{\sinh \pi}. \end{aligned}$$

Así hemos resuelto el subproblema 1, y la solución es

$$\Psi_1(x, \pi) = \frac{1}{\sinh \pi} \sen x \sinh y. \quad (3.44)$$

Subproblema 2 (Solución). Notemos que la única diferencia con el subproblema anterior gira alrededor de la función $G(y)$ (ver figura 3.6 (a) y (b)), ya que la condición no homogénea está en la parte inferior del cuadrado. Por lo tanto si reemplazamos

“ y ” por “ $(\pi - y)$ ” en (3.43), obtendremos la serie de soluciones de la ecuación de Laplace (3.19) satisfaciendo las condiciones de borde (3.21)

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, y) &= \alpha_1 \operatorname{sen} x \operatorname{senh}(\pi - y) \\
 \varphi_2(x, y) &= \alpha_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{senh} 2(\pi - y) \\
 \varphi_3(x, y) &= \alpha_3 \operatorname{sen} 3x \operatorname{senh} 3(\pi - y) \\
 &\vdots \\
 \varphi_n(x, y) &= \alpha_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(\pi - y) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Observemos que el cambio en la variable “ y ”, sigue satisfaciendo la ecuación (3.19), ya que el signo menos que surge al calcular la primera derivada desaparece cuando se calcula la segunda derivada, y así se preserva la ecuación de Laplace.

Por último tenemos que determinar una solución que satisfaga la condición de borde no homogénea (3.20). Para ello haremos uso del desarrollo en serie de Fourier de senos (ver sección 1.6) de la condición $\Psi_2(x, 0) = x(\pi - x)$, la cual es

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx, \quad 0 < x < \pi \tag{3.46}$$

en donde los coeficientes a_n vienen dados por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2i \\ \frac{8}{\pi(2i+1)^3} & \text{si } n = 2i+1. \end{cases} \tag{3.47}$$

Luego, por la forma de la ecuación (3.46) podemos decir que la solución debe ser la suma de las soluciones mostradas en (3.45), y al satisfacer la condición de borde tendremos

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n\pi \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} nx
 \end{aligned}$$

de donde vemos que

$$\begin{aligned}
 \alpha_n \operatorname{senh} n\pi &= a_n \\
 \Rightarrow \quad \alpha_n &= \frac{a_n}{\operatorname{senh} n\pi}
 \end{aligned}$$

y así, podemos ensamblar una solución al Subproblema 2, de la forma

$$\begin{aligned}\Psi_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(\pi - y)}{\operatorname{senh} n\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2i+1)^3 \operatorname{senh}(2i+1)\pi} \operatorname{sen}(2i+1)x \operatorname{senh}(2i+1)(\pi - y); \end{aligned} \quad (3.48)$$

la cual, evidentemente tiene solo términos impares de seno y seno hiperbólico, en un todo de acuerdo a la definición de a_n .

Subproblema 3 (Solución). Para este subproblema, notemos simplemente que las dos condiciones homogéneas están en las condiciones de “ y ” y la otra condición homogénea esta en la condición $x = 0$ de “ x ”, por lo tanto observamos una similitud con el subproblema 1 y así la solución a la ecuación (3.22) con las condiciones de borde (3.24) resulta solo de intercambiar la variable “ x ” por la variable “ y ” en la ecuación (3.43), así

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \alpha_1 \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha_2 \operatorname{senh} 2x \operatorname{sen} 2y \\ \varphi_3(x, y) &= \alpha_3 \operatorname{senh} 3x \operatorname{sen} 3y \\ &\vdots \\ \varphi_n(x, y) &= \alpha_n \operatorname{senh} nx \operatorname{sen} ny \\ &\vdots\end{aligned} \quad (3.49)$$

Ahora para satisfacer la condición de borde no homogénea (3.23), debemos utilizar una identidad trigonométrica que la relacione con la forma de nuestras soluciones, la cual es

$$\operatorname{sen}^3 y = \frac{3}{4} \operatorname{sen} y - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3y,$$

luego utilizando los correspondientes términos de la serie (3.49) tendremos

$$\begin{aligned}\Psi_3(\pi, y) &= \operatorname{sen}^3 y \\ &= \frac{3}{4} \operatorname{sen} y - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3y \\ &= \alpha_1 \operatorname{senh} \pi \operatorname{sen} y + \alpha_3 \operatorname{senh} 3\pi \operatorname{sen} 3y\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\alpha_1 = \frac{3/4}{\operatorname{senh} \pi} \text{ y } \alpha_3 = \frac{-1/4}{\operatorname{senh} 3\pi},$$

y agrupando estos valores tendremos que la solución es

$$\Psi_3(x, y) = \frac{3/4}{\sinh \pi} \sinh x \sen y - \frac{1/4}{\sinh 3\pi} \sinh 3x \sen 3y \quad (3.50)$$

Subproblema 4 (Solución). Para este subproblema usamos la misma técnica que relaciona el Subproblema 2 con el Subproblema 1 y así la serie de soluciones a la ecuación (3.25) con las condiciones de borde (3.27) es

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \alpha_1 \sinh(\pi - x) \sen y \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha_2 \sinh 2(\pi - x) \sen 2y \\ \varphi_3(x, y) &= \alpha_3 \sinh 3(\pi - x) \sen 3y \\ &\vdots \\ \varphi_n(x, y) &= \alpha_n \sinh n(\pi - x) \sen ny \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para satisfacer la condición de borde no homogénea (3.26) expandimos la función $f(y)$ en una serie de Fourier de senos

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sen ny, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sen ny \, dy; \end{aligned} \quad (3.52)$$

luego igualamos las correspondientes series y tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_4(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sinh n\pi \sen ny \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sen ny \end{aligned}$$

de donde $\alpha_n = \frac{a_n}{\sinh n\pi}$, y por lo tanto la solución es

$$\Psi_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh n\pi} \sinh n(\pi - x) \sen ny. \quad (3.53)$$

Reuniendo las ecuaciones (3.44), (3.48), (3.50) y (3.53); la solución del problema

inicial de distribución de temperatura es

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) = & \frac{1}{\sinh \pi} \operatorname{sen} x \sinh y \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2i+1)^3 \sinh(2i+1)\pi} \operatorname{sen}(2i+1)x \sinh[(2i+1)(\pi-y)] \\ & + \frac{3/4}{\sinh \pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \frac{1/4}{\sinh 3\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3y \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh n\pi} \sinh n(\pi-x) \operatorname{sen} ny ;\end{aligned}$$

donde a_n se evalúa como en (3.52).

Este es el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Hagamos un pequeño bosquejo de los aspectos resaltantes que permiten una exitosa obtención de la solución:

1. La ecuación diferencial parcial fundamental (3.15) es separada, al tanteo, por factores que dependen de una sola variable (3.28). Así, soluciones a (3.15) pueden ser construidas de soluciones de los ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes (3.30) y (3.31), las cuales contienen un parámetro no específico llamado *constante de separación*. “Esta es la parte fundamental de la separación”.
2. La ecuación diferencial parcial fundamental (3.15) es lineal. Esto se utiliza dos veces; primero cuando descomponemos el problema en subproblemas mas simples ((3.16)–(3.27)), y luego cuando se toman las combinaciones lineales de las soluciones separadas de los subproblemas ((3.44), (3.48), (3.50) y (3.53)).
3. Las condiciones de borde fueron impuestas sobre rectas constantes, esto es las rectas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$. Más aun, los subproblemas fueron definidos de manera tal que los valores de borde fuesen cero sobre todas, menos una de las rectas que formaban la frontera de la región.
4. De las dos ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes de la separación ((3.30), (3.31)), primero analizamos la que depende de “ x ”, la cual tiene los valores de borde homogéneos en ambos extremos ((3.39)). La ecuación diferencial misma tiene una solución general que contiene dos coeficientes indeterminados (c_i) y una constante de separación (λ).
5. Para obtener soluciones no triviales, primero escogemos uno de los coeficientes (c_i) para satisfacer la condición de borde en uno de los extremos, y usamos la constante de separación (λ) para satisfacer la condición en el otro extremo

((3.40)). Esto nos produce una serie infinita de soluciones ((3.43)), las cuales luego generarán la correspondiente serie de Fourier de senos ((3.48), (3.50), (3.53)).

6. La condición de borde homogénea para la otra variable “ y ”, fue satisfecha por escogencia de los coeficientes en la solución general correspondiente a la restricción, ya determinada, de la constante de separación.
7. La condición de borde no homogénea fue alcanzada, reuniendo todas las soluciones separadas ((3.43)) y utilizando la expansión general de la serie de Fourier del seno (ver sección 1.2) para cada uno de los casos correspondientes.

El paso mas importante es el 5, donde no solo tuvimos la suerte de encontrar soluciones no triviales sino que también la mayoría de ellas pudimos expandirlas en una serie de Fourier para funciones arbitrarias.

Lo resaltante del método de separación de variables es que el paso 5 siempre tiene éxito, de este modo la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden separada, que contiene un parámetro no específico y restringida por condiciones de borde en ambos extremos, generará una serie ortogonal de soluciones. Este aspecto de las ecuaciones diferenciales ordinarias es conocido como la *teoría de Sturm–Liouville*.

3.3

Clasificación de los diferentes subproblemas

Vamos ahora a establecer una clasificación de los subproblemas que se presentan, al calcular el estado estacionario de la distribución de temperatura, dentro de una región cuadrada que satisface la ecuación de Laplace, basado en la clase (Dirichlet, Neumann o Robín) de las condiciones de borde homogéneas que hay en cada uno de ellos. Recordemos que en cada subproblema están presentes tres condiciones homogéneas y una no homogénea. La clase de la condición no homogénea no importa en nuestra clasificación, es decir, la condición no homogénea puede ser de cualquiera de las tres clases.

Es importante también resaltar que la posición de la condición no homogénea (vease figura 3.6) no afectará sustancialmente el resultado de nuestra clasificación, ya que bastará con realizar simples cambios de variable (veanse Subproblemas 2, 3 y 4 en la sección 3.2).

Con todas estas observaciones podemos establecer la clasificación siguiente:

1. Las tres condiciones de borde homogénea son de la misma clase:
 - 1.1. Dirichlet,

- 1.2. Neumann,
- 1.3. Robin.
2. Para una misma variable, las dos condiciones de borde homogéneas son de la misma clase y la restante condición homogénea es de una clase diferente:
 - 2.1. Dirichlet (2) y Neumann (1),
 - 2.2. Dirichlet (2) y Robin (1),
 - 2.3. Neumann (2) y Dirichlet (1),
 - 2.4. Neumann (2) y Robin (1),
 - 2.5. Robin (2) y Dirichlet (1),
 - 2.6. Robin (2) y Neumann (1).
3. Para una misma variable, las dos condiciones de borde homogéneas son distintas y la restante condición homogénea es de cualquier clase:
 - 3.1. Todas las condiciones de borde homogéneas son diferentes,
 - 3.2. Dos de las condiciones de borde homogéneas son iguales.

Antes de iniciar la discusión de cada uno de los casos de esta clasificación estableceremos cierta notación para simplificar el trabajo que vamos a realizar. En primer lugar las condiciones de borde homogéneas las denotaremos por

Dirichlet = D, Neumann = N y Robin = R.

Así, por ejemplo, una condición D en la cara inferior de la figura significará que $\Psi = 0$ en esa cara o una condición N en la cara izquierda significará que $\partial\Psi/\partial x = 0$. Otra notación importante es que las figuras serán equivalentes a un cuadrado con una cara abierta (ver figura 3.8), la cual representara la posición de la condición de borde no homogénea.

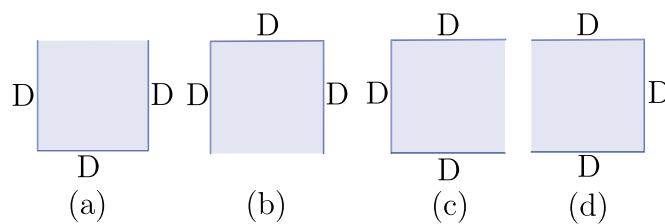


Figura 3.8: Posiciones de las condiciones.

3.3.1 Condiciones de borde homogéneas de Dirichlet

Este caso es similar al planteado en el ejemplo 3.2.1 de la sección anterior, en donde todas las condiciones de borde homogéneas son de Dirichlet; y como vemos en la figura 3.8 tenemos planteado 4 subproblemas dependiendo de la posición de la condición de borde no homogénea.

Cada uno de los gráficos de la figura representan uno de los subproblemas (1-4) del ejemplo 3.2.1 de la sección anterior y así podemos decir que, después de satisfacer las tres condiciones de borde homogéneas, la solución es

$$(a) \quad \Psi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \sinh ny \quad (3.54)$$

$$(b) \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \sinh n(\pi - y) \quad (3.55)$$

$$(c) \quad \Psi_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh nx \sin ny \quad (3.56)$$

$$(d) \quad \Psi_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh n(\pi - x) \sin ny \quad (3.57)$$

donde solamente debemos satisfacer la cuarta condición de borde no homogénea, la cual puede ser de cualquiera de las clases, incluyendo la misma Dirichlet; y así hallar el valor de la constante a_n , en cada uno de los subproblemas, de manera de poder expresar la solución en cada uno de los casos.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el problema de la figura 3.9, en donde está planteado un subproblema del caso (a) con una condición de borde no homogénea en la cara superior del cuadrado dada por $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1$.

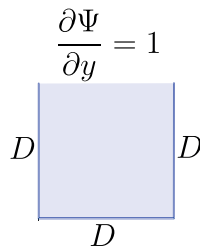


Figura 3.9: Subproblema caso (a) con condición de borde no homogénea $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1$ en la cara superior del cuadrado.

Claramente tomamos la solución Ψ_1 (3.54) y su derivada con respecto a “ y ” es

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \operatorname{sen} nx \cosh ny, \quad (3.58)$$

luego al evaluarla en $y = \pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}(x, \pi) &= n a_n \operatorname{sen} nx \cosh n\pi \\ &= 1, \end{aligned}$$

luego debemos buscar el desarrollo en serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$. Así

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nx, \quad (3.59)$$

por lo tanto igualando las ecuaciones (3.58) y (3.59) obtenemos

$$a_n = \frac{2(1 + (-1)^{n-1})}{n^2 \pi \cosh n\pi},$$

y así la solución general tendrá la forma

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 + (-1)^{n-1})}{n^2 \pi \cosh n\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} ny. \quad (3.60)$$

2.1. y 2.2. Estos casos son similares a los de **1.1.**, en ellos tenemos dos condiciones de borde iguales sobre la misma variable, y para su análisis partiremos del subproblema 1.1. que corresponda; satisfaciendo posteriormente el resto de las condiciones de borde que estén presentes.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos el problema de la figura 3.10, con dos condiciones de borde homogéneas de Dirichlet sobre la variable “ x ”, una condición de Robin homogénea sobre la cara inferior $\frac{\partial \Psi}{\partial y} - 2\Psi = 0$ y una condición no homogénea de Dirichlet en la cara superior $\Psi = x$.

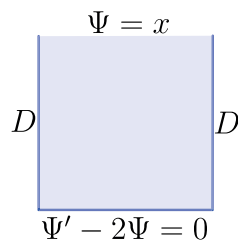


Figura 3.10: Problema.

Partamos de la forma de la solución para la variable “ x ”, según 1 tendremos

$$F_n(x) = c_n \operatorname{sen} nx, \quad (3.61)$$

y para la variable “ y ” considerando el correspondiente caso $\lambda < 0$ tenemos

$$G_n(y) = d_5 \operatorname{senh} ny + d_6 \cosh ny \quad (3.62)$$

y su derivada

$$G'_n(y) = d_5 n \cosh ny + d_6 n \operatorname{senh} ny.$$

Luego al satisfacer la condición de Robin en $x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} G'_n(0) - 2G_n(0) &= d_5 n - 2d_6 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde $d_5 = \frac{2}{n} d_6$ y de esta forma

$$G_n(y) = d_6 \left(\frac{2}{n} \operatorname{senh} ny + \cosh ny \right). \quad (3.63)$$

Ahora reuniendo las ecuaciones (3.61) y (3.63) tenemos

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \left(\frac{2}{n} \operatorname{senh} ny + \cosh ny \right); \quad (3.64)$$

luego para lograr que se cumpla la condición no homogénea desarrollamos la función $f(x) = x$ en una serie de Fourier de senos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx,$$

e igualando los términos n -ésimos de ambas series, evaluados en $y = \pi$ tenemos que

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{senh} n\pi + \frac{n}{2} \cosh n\pi}.$$

Por lo tanto la solución es

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{senh} n\pi + \frac{n}{2} \cosh n\pi} \operatorname{sen} nx \left(\frac{2}{n} \operatorname{senh} ny + \cosh ny \right). \quad (3.65)$$

3.3.2 Condiciones de borde homogéneas de Neumann

Para este caso comenzamos por darnos cuenta que las soluciones ((3.54)-(3.57)) tienen la forma de la solución buscada, para los subproblemas de la figura 3.11, ya que si las ecuaciones ((3.54)-(3.57)) fuesen las derivadas estarían satisfechas las condiciones de borde de Neumann para esos subproblemas.

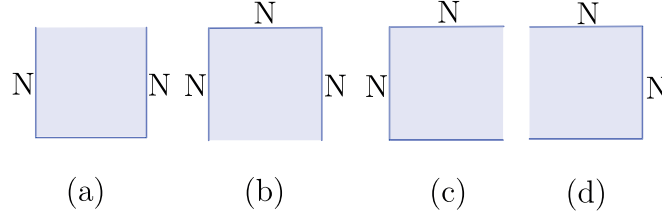


Figura 3.11: Subproblemas.

Por lo tanto es suficiente considerar las soluciones de la forma

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \Psi_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cosh ny \\
 \text{(b)} \quad \Psi_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cosh n(\pi - y) \\
 \text{(c)} \quad \Psi_3(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh nx \cos ny \\
 \text{(d)} \quad \Psi_4(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh n(\pi - x) \cos ny
 \end{aligned}$$

donde una conveniente escogencia de la constante a_n nos dará la solución final. Un hecho importante que hay que considerar es que, en este caso, la posibilidad de $\lambda = 0$ no está descartada, contrariamente a el caso anterior (ver sección 3.2 Subproblema I ecuaciones (3.33) y (3.36)).

De esta forma consideremos la posibilidad de la ecuación (3.33) donde para la variable “ x ” y para $\lambda = 0$ se tiene la solución

$$F(x) = c_3 + c_4 x,$$

y su derivada

$$F'(x) = c_4 = 0,$$

por lo cual la solución será

$$F(x) = c_3;$$

y similarmente para la variable “ y ”, la solución será

$$G(y) = d_4 ,$$

es decir, en ambos casos es constante, por lo tanto una solución constante satisfecerá los requerimientos de las condiciones de borde, en todos los casos, por ejemplo en el caso (a)

$$\Psi_1(x, y) = a_0 = a_0 \cos 0x \cosh 0y .$$

Esto nos permite, al incluir $n = 0$, extender las soluciones a:

$$(a) \quad \Psi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \cosh ny \quad (3.66)$$

$$(b) \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \cosh n(\pi - y) \quad (3.67)$$

$$(c) \quad \Psi_3(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh nx \cos ny \quad (3.68)$$

$$(d) \quad \Psi_4(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh n(\pi - x) \cos ny \quad (3.69)$$

donde al igual que en el caso anterior solo falta escoger el valor de a_n para determinar la solución.

Ejemplo 3.3.3. Consideremos el problema de la figura 3.12 en donde la condición de borde no homogénea es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} - 2\Psi = 4 ,$$

la cual es evidentemente una condición de Robin, en la cara derecha del cuadrado.

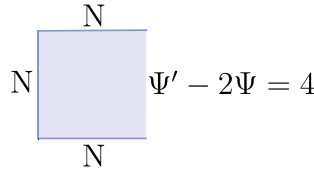


Figura 3.12: Problema.

Luego debemos considerar el caso (c) planteado por la ecuación (3.63) donde α_n es la constante, para el cual la derivada, en $x = \pi$, es

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial x}(\pi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha_n \sinh n\pi \cos ny, \quad (3.70)$$

y la función evaluada en $x = \pi$ es

$$\Psi_3(\pi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cosh n\pi \cos ny, \quad (3.71)$$

de esta forma

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial x}(\pi, y) - 2\Psi_3(\pi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (n\alpha_n \sinh n\pi - 2\alpha_n \cosh n\pi) \cos ny$$

y desarrollando la función constante 4 en una serie de Fourier de cosenos tenemos

$$f(y) = 4 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny$$

y utilizando la ecuación (1.18) de la sección 1.6, para $T = \pi$, se tiene que $a_0 = 4$ y $a_n = 0$ para todo $n > 1$, por lo tanto igualando las ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} (0 a_0 \sinh 0\pi - 2\alpha_0 \cosh 0\pi) \cos 0y &= 4 \\ \Rightarrow -2\alpha_0 &= 4, \end{aligned}$$

de esta forma $\alpha_0 = -2$; y la solución es únicamente $\Psi_3(x, y) = -2$.

2.3. y 2.4.. En estos casos al igual que en 2.1. y 2.2., analizaremos el subproblema 1.2. que corresponda; ya que tenemos dos condiciones de borde de Neumann homogéneas, según la variable que corresponda, una condición adicional homogénea y otra no homogénea, para la otra variable.

Ejemplo 3.3.4. Sea el problema de la figura 3.13, donde tenemos dos condiciones de borde de Neumann orientadas en la variable “ y ”, una condición de borde de Dirichlet homogénea sobre el lado derecho y una condición de Robin no homogénea sobre el lado izquierdo. Donde la condición de Robin es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} - 3\Psi = \cos^3 y.$$

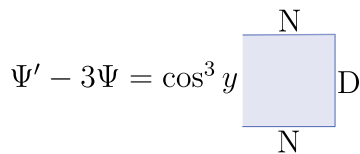


Figura 3.13: Problema.

Comenzamos utilizando la parte correspondiente a la variable “ y ” dentro de la ecuación

(3.68) que es la solución para el caso de condiciones de Neumann homogéneas para esa variable, o sea

$$G_n(y) = d_n \cos ny, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.72)$$

Luego consideramos la solución para la condición homogénea de Dirichlet en la variable “ x ” sobre la cara derecha, la cual es según la ecuación (3.57)

$$F_n(x) = c_n \sinh n(\pi - x). \quad (3.73)$$

Por lo cual al reunir las ecuaciones (3.72) y (3.73) tenemos la solución

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh n(\pi - x) \cos ny \quad (3.74)$$

donde la derivada es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n n \cosh n(\pi - x) \cos ny; \quad (3.75)$$

y ahora evaluando la condición de Robin en $x = 0$ tendremos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, y) - 3\Psi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n \cosh n\pi + 3 \sinh n\pi) \cos ny$$

serie que debemos comparar con la correspondiente identidad para la función $\cos^3 y$, la cual es

$$\cos^3 y = \frac{1}{4} \cos 3y + \frac{3}{4} \cos y;$$

esto nos conduce a las relaciones

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{3}{4(\cosh \pi + 3 \sinh \pi)} \\ a_3 &= -\frac{1}{12(\cosh 3\pi + \sinh 3\pi)} \\ a_i &= 0 \text{ para todo } i \neq 1, 3, \end{aligned}$$

con estos valores podemos determinar la solución

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \frac{-3}{4(\cosh \pi + 3 \sinh \pi)} \sinh(\pi - x) \cos y \\ &+ \frac{-1}{12(\cosh 3\pi + 3 \sinh 3\pi)} \sinh 3(\pi - x) \cos 3y. \quad \square \end{aligned} \quad (3.76)$$

Es importante notar que no hemos considerado los casos donde se presentan varias condiciones de Robin, y la razón es que, aunque matemáticamente sea posible construir el problema, físicamente es poco probable. Por este motivo hallar explícitamente la solución podría ser un problema insoluble, y mucho mas cuando la constante α es distinta en cada una de las condiciones.

De todas formas vamos a presentar un esquema para los casos donde la constante α es la misma para todas las condiciones de Robin de un mismo subproblema.

3.3.3 Condiciones de borde de Robin

Los subproblemas planteados en la figura 3.14

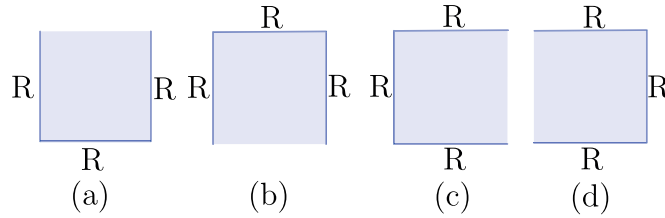


Figura 3.14: Subproblemas.

están gobernados, al igual que todos los anteriores, por la ecuación de Laplace y bajo tres condiciones homogéneas de Robín, las cuales según el caso serán

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = \alpha \Psi \quad \text{o} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \alpha \Psi, \quad (3.77)$$

y que podemos expresar también como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) - \alpha \Psi = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) - \alpha \Psi = 0, \quad (3.78)$$

que bajo la notación que vemos en la figura 3.14, son equivalentes a R (es decir, la letra R nos indicará una de las condiciones de (3.78), según sea el caso).

Para este caso debemos desarrollar un conjunto de soluciones partiendo de las ecuaciones separadas ((3.30) y (3.31)) de la sección 3.2.

En primer lugar, para el subproblema de la figura 3.14(a), analicemos la variable “ x ”

1) $\lambda > 0$:

$$F(x) = c_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x$$

y

$$F'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sqrt{\lambda} \cosh \sqrt{\lambda} x$$

donde $F(0) = c_1$ y $F'(0) = c_2 \sqrt{\lambda}$, y entonces

$$\begin{aligned} R &= F'(0) - \alpha F(0) \\ &= c_2 \sqrt{\lambda} - \alpha c_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto nos establece la condición de que $c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} c_1$, y como siempre estaremos descartando la solución trivial no consideraremos el caso $c_2 = c_1 = 0$, luego

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1 \left(\cosh \sqrt{\lambda} x + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sinh \sqrt{\lambda} x \right) \\ F'(x) &= c_1 \left(\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda} x + \alpha \cosh \sqrt{\lambda} x \right). \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} R &= F'(\pi) - \alpha F(\pi) = c_1 \left(\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda} \pi + \alpha \cosh \sqrt{\lambda} \pi \right) \\ &\quad - \alpha c_1 \left(\cosh \sqrt{\lambda} \pi + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sinh \sqrt{\lambda} \pi \right) \\ &= c_1 \left(\sqrt{\lambda} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \sinh \sqrt{\lambda} \pi = 0, \end{aligned}$$

luego esto nos da la solución trivial $c_1 = 0$ (descartada) o una solución condicionada a $\lambda = \alpha^2$, y así tendríamos la solución

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= c_1 (\cosh \alpha x + \sinh \alpha x) \\ &= c_1 \left(\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \right) \\ &= c_1 e^{\alpha x} \end{aligned} \tag{3.79}$$

II) $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= c_3 + c_4 x \\ &\quad \text{y} \\ F'(x) &= c_4, \end{aligned}$$

por lo que $F(0) = c_3$ y $F'(0) = c_4$, y entonces

$$R = F'(0) - \alpha F(0)$$

$$\begin{aligned}
&= c_4 - \alpha c_3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

así tenemos $c_4 = \alpha c_3$; y la solución tomará la forma $F(x) = c_3(1 + \alpha x)$ y la derivada será $F'(x) = \alpha c_3$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
R &= F'(\pi) - \alpha F(\pi) \\
&= \alpha c_3 - \alpha c_3(1 + \alpha \pi) \\
&= -\alpha^2 c_3 \pi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

solo nos conduce a soluciones triviales, luego esta condición la descartamos.

III) $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= c_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_6 \sen \sqrt{-\lambda} x \\
&\text{y} \\
F'(x) &= -c_5 \sqrt{-\lambda} \sen \sqrt{-\lambda} x + c_6 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} x;
\end{aligned}$$

luego $F(0) = c_5$ y $F'(0) = c_6 \sqrt{-\lambda}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
R &= F'(0) - \alpha F(0) \\
&= c_6 \sqrt{-\lambda} - \alpha c_5 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde $c_6 = \frac{\alpha}{\sqrt{-\lambda}} c_5$; y la solución y su derivada toman la forma

$$\begin{aligned}
F(x) &= c_5 \left(\cos \sqrt{-\lambda} x + \frac{\alpha}{\sqrt{-\lambda}} \sen \sqrt{-\lambda} x \right) \\
F'(x) &= c_5 \left(-\sqrt{-\lambda} \sen \sqrt{-\lambda} x + \alpha \cos \sqrt{-\lambda} x \right);
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
F(\pi) &= c_5 \left(\cos \sqrt{-\lambda} \pi + \frac{\alpha}{\sqrt{-\lambda}} \sen \sqrt{-\lambda} \pi \right) \\
F'(\pi) &= c_5 \left(-\sqrt{-\lambda} \sen \sqrt{-\lambda} \pi + \alpha \cos \sqrt{-\lambda} \pi \right) \\
R &= F'(\pi) - \alpha F(\pi) = c_5 \left[-\left(\sqrt{-\lambda} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{-\lambda}} \right) \right] \sen \sqrt{-\lambda} \pi = 0,
\end{aligned}$$

lo que nos da la solución trivial $c_5 = 0$ (descartada) o $\lambda = \alpha^2$, la cual no es posible ya que $\lambda < 0$ y α es real (si α fuese imaginario, esta posibilidad no sería descartada, pero no es el estudio de este texto). Por lo tanto la igualdad solo es satisfecha cuando $\sqrt{-\lambda} = n^2$, es decir, $\lambda = -n^2$, y así la solución es

$$F_n(x) = c_5 \left(\cos nx + \frac{\alpha}{n} \operatorname{sen} nx \right) \quad (3.80)$$

Ahora debemos analizar la variable “ y ” para los correspondientes casos, así

i) cuando $\lambda > 0$ y $\lambda = \alpha^2$ las soluciones para “ y ” son

$$\begin{aligned} G(y) &= d_1 \cos \alpha y + d_2 \operatorname{sen} \alpha y \\ G'(y) &= -d_1 \alpha \operatorname{sen} \alpha y + d_2 \alpha \cos \alpha y, \end{aligned}$$

por lo cual $G(0) = d_1$ y $G'(0) = d_2 \alpha$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} R &= G'(0) - \alpha G(0) \\ &= d_2 \alpha - \alpha d_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde $d_2 = d_1$, y así la solución tomará la forma

$$G_\alpha(y) = d_2 (\cos \alpha y + \operatorname{sen} \alpha y). \quad (3.81)$$

Ahora reuniendo las ecuaciones (3.79) y (3.80) y para cualquier constante K , podemos formar la solución general

$$\Psi_\alpha(x, y) = K e^{\alpha x} (\cos \alpha y + \operatorname{sen} \alpha y). \quad (3.82)$$

ii) cuando $\lambda < 0$ y $\lambda = -n^2$ las soluciones para “ y ” son

$$\begin{aligned} G(y) &= d_5 \cosh ny + d_6 \operatorname{senh} ny \\ G'(y) &= d_5 n \operatorname{senh} ny + d_6 n \cosh ny, \end{aligned}$$

de esta forma $G(0) = d_5$, y $G'(0) = d_6 n$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} R &= G'(0) - \alpha G(0) \\ &= d_6 n - \alpha d_5 \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto nos indica que $d_6 = \frac{\alpha}{n} d_5$, y por lo tanto la solución tomará la forma

$$G_n(y) = d_5 \left(\cosh ny + \frac{\alpha}{n} \sinh ny \right). \quad (3.83)$$

Así, obtenemos, para cualquier constante a_n , una solución general al tomar la sumatoria de las ecuaciones (3.80) y (3.83)

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos nx + \frac{\alpha}{n} \sin nx \right) \left(\cosh ny + \frac{\alpha}{n} \sinh ny \right) \quad (3.84)$$

Los correspondientes cambios de variable también están presentes en este caso para satisfacer todos los subproblemas de la figura 3.14, así tendremos respectivamente, según la figura, las soluciones

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\cos nx + \frac{\alpha}{n} \sin nx \right] \left[\cosh n(\pi - y) + \frac{\alpha}{n} \sinh n(\pi - y) \right] \quad (3.85)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cosh nx + \frac{\alpha}{n} \sinh nx \right) \left(\cos ny + \frac{\alpha}{n} \sin ny \right) \quad (3.86)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\cosh n(\pi - x) + \frac{\alpha}{n} \sinh n(\pi - x) \right] \left[\cos ny + \frac{\alpha}{n} \sin ny \right] \quad (3.87)$$

Notemos que este es un caso especial donde el valor de α es el mismo para todas las condiciones de Robín, y así serán todos los problemas donde estén presentes las condiciones de Robín. A continuación presentaremos un ejemplo del tipo 2.6., ya que su análisis es equivalente al presentado anteriormente.

Ejemplo 3.3.5. Consideremos el problema de la figura 3.15 en donde están presentes dos condiciones de borde de Robín homogéneas,

$$\frac{\Psi}{\partial x} - 2\Psi = 0,$$

sobre la variable “ x ”, una condición de borde de Dirichlet homogénea en la cara superior y una condición de borde de Dirichlet no homogénea,

$$\Psi = \sin 2x + \cos 2x,$$

en la cara inferior.

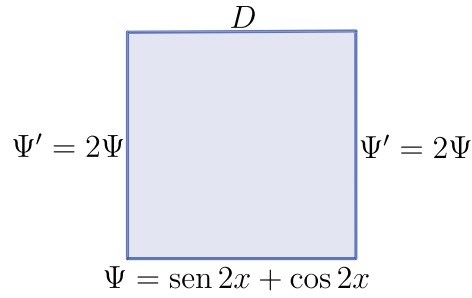


Figura 3.15: Problema.

Claramente podemos ver que la solución de este problema está dentro de las soluciones para $\lambda < 0$, por lo cual podemos decir que la solución, en la variable “ x ” es

$$F_n(x) = a_n \left(\cos nx + \frac{2}{n} \sin nx \right), \quad (3.88)$$

para la variable “ y ”, la solución que satisface la otra condición homogénea es

$$G_n(y) = b_n \sinh n(\pi - y). \quad (3.89)$$

Ahora al reunir las ecuaciones (3.88) y (3.89) tendremos una solución

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos nx + \frac{2}{n} \sin nx \right) \sinh n(\pi - y). \quad (3.90)$$

Para la solución final, solo nos falta satisfacer la condición no homogénea, para ello tomaremos $y = \pi$ y $n = 2$ en la ecuación (3.90) y tendremos

$$a_2(\cos 2x + \sin 2x) \sinh 2\pi = \sin 2x + \cos 2x,$$

por lo tanto

$$a_2 = \frac{1}{\sinh 2\pi},$$

y la solución definitiva que satisface las condiciones de borde es

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\sinh 2\pi} (\cos 2x + \sin 2x) \sinh 2(\pi - y). \quad \square \quad (3.91)$$

Para analizar el último caso, donde para una misma variable las condiciones de borde son distintas utilizaremos un ejemplo general y estudiaremos uno de los subproblemas que se plantean.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos el problema de la figura 3.16 y analicemos el primer

subproblema (a), en donde tenemos condiciones de borde homogéneas de Dirichlet y Neumann en la variable “ x ”, una condición de borde homogénea de Neumann para $y = 0$ y una condición de borde no homogénea de Robín , $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\Psi + \sin(x/2)$, para $y = \pi$.

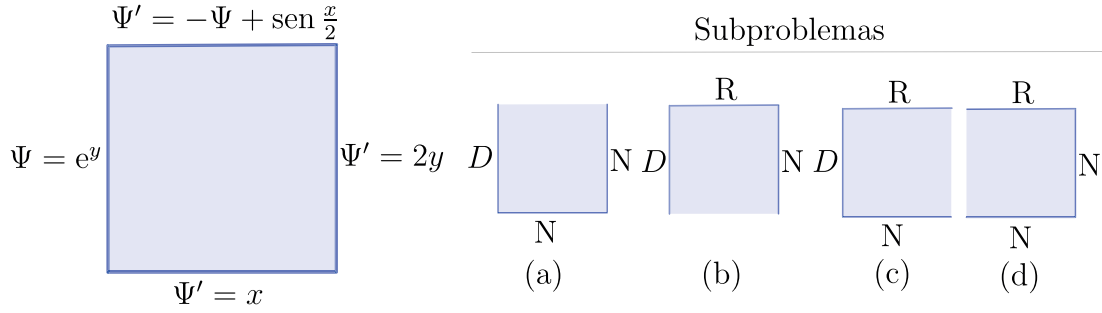


Figura 3.16: Problema y subproblemas.

En primer lugar se puede ver fácilmente (lo dejamos al lector) que las condiciones de borde homogéneas para la variable “ x ” solo producen soluciones triviales para $\lambda > 0$, así que analizaremos el caso $\lambda < 0$. Sabemos por la ecuación (3.34) de la sección 3.2 que tendrá la forma

$$F(x) = c_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_6 \sin \sqrt{-\lambda}x,$$

luego para $x = 0$ tenemos $F(0) = c_5 = 0$, por lo cual

$$F(x) = c_6 \sin \sqrt{-\lambda}x,$$

y su derivada

$$F'(x) = c_6 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda}x,$$

al evaluarla en $x = \pi$ es

$$\begin{aligned} F'(\pi) &= c_6 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} \pi \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde al descartar la solución trivial tendremos que la igualdad se presenta cuando

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{2n-1}{2} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{-(2n-1)^2}{4},$$

y así la solución es

$$F_n(x) = c_n \sin \frac{2n-1}{2} x. \quad (3.92)$$

Ahora para la variable “ y ” con la misma condición $\lambda < 0$ tenemos

$$G(y) = d_5 \cosh \frac{2n-1}{2}y + d_6 \sinh \frac{2n-1}{2}y$$

y su derivada

$$G'(y) = d_5 \frac{2n-1}{2} \sinh \frac{2n-1}{2}y + d_6 \frac{2n-1}{2} \cosh \frac{2n-1}{2}y$$

al satisfacer la condición de borde de Neumann en $y = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} G'(0) &= d_6 \frac{2n-1}{2} = 0 \\ \Rightarrow d_6 &= 0, \end{aligned}$$

y así

$$G_n(y) = d_n \cosh \frac{2n-1}{2}y. \quad (3.93)$$

De esta manera, al reunir las ecuaciones (3.92) y (3.93) tenemos la solución

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{2n-1}{2}x \cosh \frac{2n-1}{2}y. \quad (3.94)$$

Finalmente buscamos satisfacer la condición no homogénea, para ello calculamos la derivada de (3.94)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{2n-1}{2} \sin \frac{2n-1}{2}x \sinh \frac{2n-1}{2}y$$

luego al aplicar la ecuación de la condición de Robín tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{2n-1}{2}x \left(\frac{2n-1}{2} \sinh \frac{2n-1}{2}\pi + \cosh \frac{2n-1}{2}\pi \right) = \sin \frac{x}{2}$$

por lo cual la igualdad será satisfecha para $n = 1$, y tendremos

$$a_1 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh \frac{\pi}{2} + \cosh \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{x}{2}$$

luego

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} \sinh \frac{\pi}{2} + \cosh \frac{\pi}{2}},$$

por lo tanto la solución torna la forma

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sinh \frac{1}{2} \pi + \cosh \frac{1}{2} \pi} \sin \frac{1}{2} x \cosh \frac{1}{2} y. \quad (3.95)$$

3.4

Solución de las ecuaciones de onda, del calor y Laplace por el método de separación de variables

En las secciones anteriores vimos ejemplos de como separando variables en una ecuación diferencial parcial puede llevar a ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden ser utilizadas para construir una solución general de la ecuación original. El poder de esta técnica recae en el hecho de que muchas de las ecuaciones clásicas de la física pueden ser separadas.

En esta sección nos enfocaremos en el proceso de separación, tomando nota de los tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en la separación en las clásicas ecuaciones diferenciales parciales.

Podemos empezar por reducir el esfuerzo si consideramos la ventaja de la similaridad entre

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{la ecuación de onda}), \quad (3.96)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{la ecuación del calor}) \quad (3.97)$$

y

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (\text{la ecuación de Laplace}). \quad (3.98)$$

Muchos sistemas físicos son gobernados por estas ecuaciones junto con condiciones de borde impuestas sobre superficies cilíndricas o esféricas. Por lo cual sería importante investigar la posibilidad de separar esas ecuaciones en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) y esféricas (r, θ, ϕ) , así como en cartesianas.

Si buscamos por separado las soluciones de la forma

$$\Psi = T(t) \Psi(\cdot, \cdot, \cdot) \quad (3.99)$$

donde $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ es una o función que depende solo de las variables (x, y, z) , (ρ, θ, z) o

(r, θ, ϕ) , entonces al sustituir (3.99) dentro de (3.96) nos da

$$T \nabla^2 \Psi = \Psi T''$$

y esta ecuación nos produce

$$\frac{\nabla^2 \Psi}{\Psi} = \frac{T''}{T} \quad (3.100)$$

Dado que el lado derecho de la ecuación depende solo de “ t ” y el lado izquierdo no depende de “ t ” entonces afirmamos que ambos lados deben ser constantes

$$\frac{\nabla^2 \Psi}{\Psi} = K \quad \text{o} \quad \nabla^2 \Psi = K \Psi \quad (3.101)$$

y

$$\frac{T''}{T} = K \quad \text{o} \quad T'' = KT. \quad (3.102)$$

La ecuación (3.101) es conocida como la *ecuación de Helmholtz*, para la cual haremos el proceso de separación de variables mas adelante. La ecuación del tiempo (3.102) es simplemente la ecuación del oscilador armónico (1.10) (ver sección 1.5 del capítulo 1) y sus soluciones son

$$T(t) = \begin{cases} c_1 \cosh \sqrt{\lambda} t + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} t & \text{si } \lambda > 0, \\ c_3 + c_4 t & \text{si } \lambda = 0, \\ c_5 \cos \sqrt{-\lambda} t + c_6 \sin \sqrt{-\lambda} t & \text{si } \lambda < 0. \end{cases} \quad (3.103)$$

De la misma manera al sustituir (3.99) dentro de la ecuación del calor (3.97) nos queda

$$\frac{\nabla^2 \Psi}{\Psi} = \frac{T'}{T} \quad (3.104)$$

Así obtenemos la misma ecuación (3.101) y la ecuación dependiente del tiempo

$$\frac{T'}{T} = K \quad (3.105)$$

o

$$T' = KT,$$

donde las soluciones de (3.105) son

$$T(t) = c e^{Kt}. \quad (3.106)$$

Por lo tanto, las soluciones separadas para las ecuaciones de onda y calor se obtienen de las soluciones de la ecuación de Helmholtz anexando los factores que dependen del tiempo (3.103) o (3.106) respectivamente. Para la ecuación de Laplace (3.98) es simplemente la ecuación de Helmholtz (3.101) con el parámetro K igual a cero.

Después de analizar el factor que depende del tiempo vamos a separar la ecuación de Helmholtz en base a los distintos sistemas de coordenadas.

1. La ecuación de Helmholtz de tres variables en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = K \Psi. \quad (3.107)$$

Si intentamos encontrar soluciones de la forma

$$\Psi(x, y, z) = F(x) G(y) H(z)$$

entonces la ecuación (3.107) nos lleva a la ecuación

$$F''(x) G(y) H(z) + F(x) G''(y) H(z) + F(x) G(y) H''(z) = K F(x) G(y) H(z).$$

Esta última ecuación puede ser separada al dividir por $F(x) G(y) H(z)$ como

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} = K$$

y separando la dependencia de “ x ” tenemos

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} - \frac{H''(z)}{H(z)} + K, \quad (3.108)$$

y por el mismo argumento usado anteriormente podemos decir que cada lado es constante y así

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F(x)} &= \alpha_1 \\ \Rightarrow F''(x) &= \alpha_1 F(x), \end{aligned}$$

la cual es la ecuación del oscilador armónico; luego la ecuación (3.108) nos queda

$$\frac{G''(y)}{G(y)} + \frac{H''(z)}{H(z)} = K - \alpha_1. \quad (3.109)$$

Claramente esto nos conduce a las separaciones en “ y ” y “ z ”,

$$G''(y) = \alpha_2 G(y) \text{ y } H''(z) = \alpha_3 H(z),$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = K$ por la ecuación (3.109).

2. La ecuación de Helmholtz de dos variables en coordenadas polares es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = K \Psi.$$

Ahora utilizando el proceso de separación $\Psi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ tenemos

$$\frac{1}{r} (r R'(r))' \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = K R(r) \Theta(\theta)$$

y una pequeña manipulación algebraica nos produce

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r}{R(r)} (r R'(r))' + r^2 K.$$

Bajo el mismo argumento anterior podemos ver que la ecuación para $\Theta(\theta)$ es la ecuación del oscilador armónico $\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$, y la ecuación para “ r ”, cuando $K = 0$ (ecuación de Laplace), es equidimensional

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda R(r) = 0.$$

Para $K \neq 0$ una forma de la *ecuación de Bessel* resulta (para mayor información sobre la ecuación de Bessel ver Watson [39]):

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (-K r^2 + \lambda) R(r) = 0.$$

3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ &= K \Psi. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Al insertar la sustitución $\Psi(\rho, \theta, z) = R(\rho) \Theta(\theta) Z(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\rho R'(\rho))'}{\rho} \Theta(\theta) Z(z) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \Theta''(\theta) Z(z) \\ + R(\rho) \Theta(\theta) Z''(z) = K R(\rho) \Theta(\theta) Z(z) \end{aligned} \quad (3.111)$$

y al separar la variable “ θ ” tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= -\frac{\rho}{R(\rho)} (\rho R'(\rho))' - \rho^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \rho^2 K \\ &= \lambda \end{aligned} \quad (3.112)$$

la cual por el argumento ya conocido nos da $\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$.

Observemos que la separación en la variable “ ρ ” no podía hacerse en este momento, lo cual si podremos hacer después de la variable “ θ ”. Esto nos indica que el éxito en la separación de variable puede depender de el orden en el cual se escoja la separación.

Ahora separemos la variable “ z ” de la ecuación (3.112)

$$\begin{aligned} \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= K - \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{(\rho R'(\rho))'}{\rho R(\rho)} \\ &= \delta \end{aligned} \quad (3.113)$$

y se nos plantea la conocida ecuación $Z''(z) = \delta Z(z)$.

Finalmente la dependencia en la variable “ ρ ” surge de la ecuación (3.113) como

$$\frac{(\rho R'(\rho))'}{\rho R(\rho)} + \frac{\lambda}{\rho^2} = K - \delta$$

la cual es equivalente a

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left(\delta - K + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (3.114)$$

que es equidimensional si $\delta = K$, en cualquier otro caso es otra forma de la ecuación de Bessel.

4. La ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \\ &= K \Psi.\end{aligned}\tag{3.115}$$

Para realizar la separación sustituimos $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{(r^2 R'(r))'}{r^2} \Theta(\theta) \Phi(\phi) + \frac{(\sin \phi \Phi'(\phi))'}{r^2 \sin \phi} R(r) \Theta(\theta) \\ + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \sin^2 \phi} R(r) \Phi(\phi) = K R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi).\end{aligned}\tag{3.116}$$

Ahora multiplicando la ecuación anterior por el factor

$$\frac{r^2 \sin^2 \phi}{R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)}$$

y efectuando las correspondientes operaciones obtenemos la ecuación para la variable “ θ ”

$$\begin{aligned}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= -\sin^2 \phi \frac{(r^2 R'(r))'}{R(r)} - \sin \phi \frac{(\sin \phi \Phi'(\phi))'}{\Phi(\phi)} + K r^2 \sin^2 \phi \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

donde λ es una constante. Luego efectuando ciertas manipulaciones la separación en la variable “ ϕ ” nos lleva a

$$\begin{aligned}\frac{(\sin \phi \Phi'(\phi))'}{\sin \phi \Phi(\phi)} + \frac{\lambda}{\sin^2 \phi} &= -\frac{(r^2 R'(r))'}{R(r)} + K r^2 \\ &= \delta \\ \Rightarrow (\sin \phi \Phi'(\phi))' + \frac{\lambda}{\sin \phi} \Phi(\phi) &= \delta \sin \phi \Phi(\phi).\end{aligned}\tag{3.117}$$

Realizando los cambios de variable $x = \cos \phi$, $y(x) = \Phi(\phi)$ nos transforma la ecuación anterior en la ecuación asociada de Legendre (3.113)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \frac{\lambda}{1 - x^2} y = \delta y.$$

La restante dependencia de “ r ” en la ecuación (3.117) satisface, si $K = 0$ (es

decir, el caso de la ecuación de Laplace), una ecuación equidimensional

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) + (\delta - Kr^2) R(r) = 0. \quad (3.118)$$

de hecho las soluciones de esta última ecuación son conocidas como las *funciones esféricas de Bessel* (ver Watson [39]).

3.5

Ejercicios

Ejercicio 3.5.1. Verificar que $\Psi(x, y) = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ resuelve el problema indicado en la figura 3.17

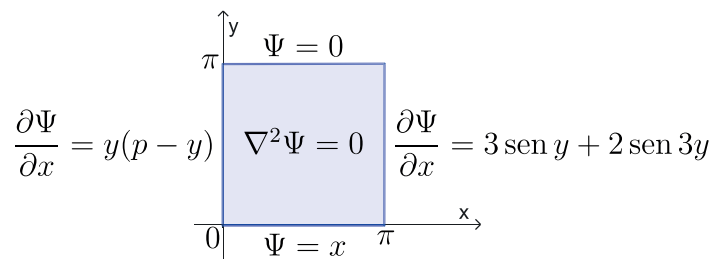


Figura 3.17: Problema.

donde

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(2n+1)(\pi-x)}{\sinh(2n+1)\pi} \frac{\sen(2n+1)y}{(2n+1)^4} \\ \Psi_2(x, y) &= \frac{\pi-y}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \frac{\sinh(2n+1)(\pi-y)}{\sinh(2n+1)\pi} \\ \Psi_3(x, y) &= \frac{3 \cosh x}{\sinh \pi} \sen y + \frac{2 \cosh 3x}{3 \sinh 3\pi} \sen 3y. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5.2. Comprobar que

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sen nx \sinh ny,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sen nx \, dx,$$

resuelve el problema indicado en la figura 3.18.

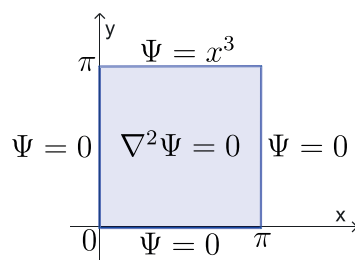


Figura 3.18: Problema.

Ejercicio 3.5.3. Verificar que si al problema de la figura 3.3, planteado en el ejemplo 3.1.2, le cambiamos la ecuación de Laplace homogénea por la no homogénea

$$\nabla^2 \Psi = \cos 2x \sen 2y,$$

entonces la función $\Psi(x, y) = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5$ resuelve este problema, donde Ψ_1 a Ψ_4 son las soluciones del problema original y

$$\Psi_5(x, y) = -\frac{1}{8} \cos 2x \sen 2y.$$

¿Cual será el subproblema que resuelve la ecuación Ψ_5 ?

Ejercicio 3.5.4. Use el conjunto de soluciones que muestra la ecuación (3.43), en la sección 3.2, para resolver los subproblemas del tipo 1 (ver ecuaciones (3.16)–(3.18) de la misma sección), donde la condición de borde no homogénea está dada por:

- a) $\Psi(x, \pi) = 4 \sen 3x$
- b) $\Psi(x, \pi) = 0$
- c) $\Psi(x, \pi) = \sen x \cos x$
- d) $\Psi(x, \pi) = 3 \sen 2x - 2 \sen 3x$
- e) $\Psi(x, \pi) = \sen^5 x$ (Ayuda: Utilice la identidad trigonométrica que descompone $\sen^5 x$)
- f) $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \pi) = \sen x$
- g) $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \pi) = 3 \sen 2x - 2 \sen 3x$

Ejercicio 3.5.5. Resolver los problemas de las figuras 3.19, 3.20 y 3.21.

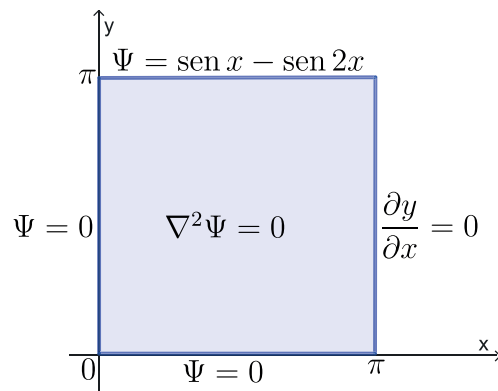


Figura 3.19: Problema.

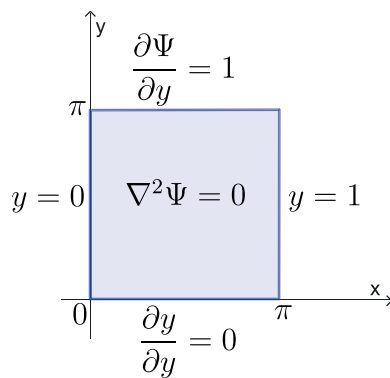


Figura 3.20: Problema.

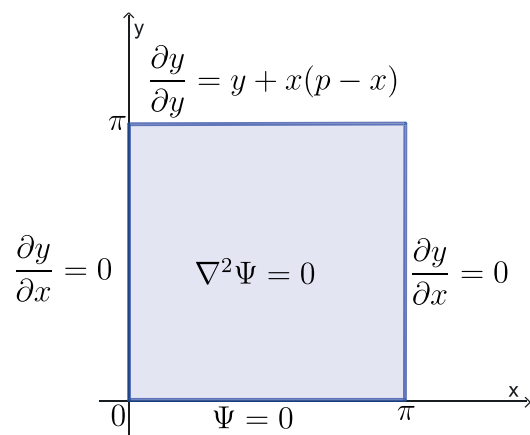


Figura 3.21: Problema.

Ejercicio 3.5.6. Resolver el problema con dos condiciones de borde de Robín no homogéneas planteado en la figura 3.22

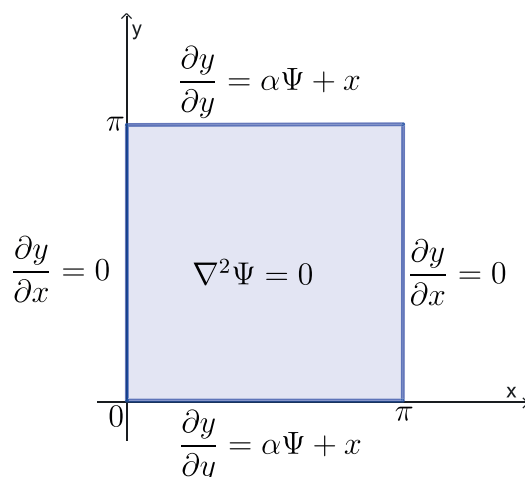


Figura 3.22: Problema.

Ejercicio 3.5.7. Resolver el problema con dos condiciones de borde de Neumann y dos de Robín planteado en la figura 3.23

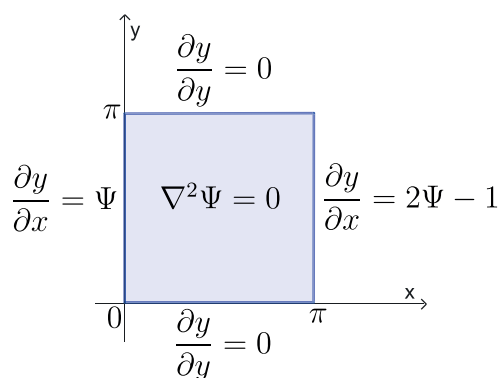


Figura 3.23: Problema.

Ejercicio 3.5.8. Defina cada uno de los subproblemas en los que se puede descomponer los problemas planteados en las figuras 3.24 y 3.25.

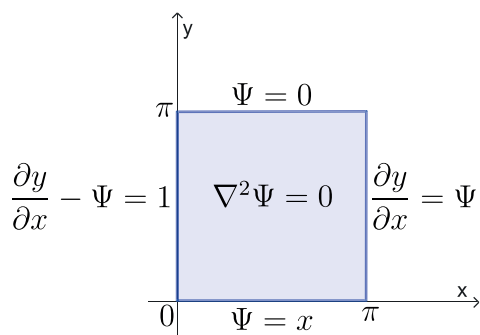


Figura 3.24: Problema.

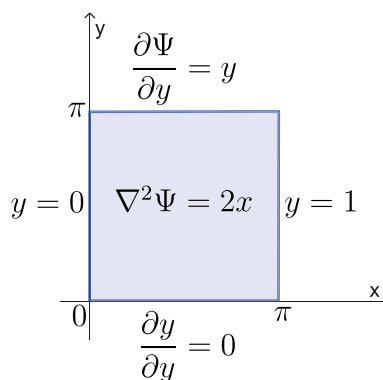


Figura 3.25: Problema.

Ejercicio 3.5.9. Realizar la correspondiente separación de variables en coordenadas cartesianas, para la ecuación de onda amortiguada de tres variables

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + v \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Ejercicio 3.5.10. Separar la ecuación de onda de dos variables en coordenadas polares.

Ejercicio 3.5.11. Separar la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas.

4

El Problema de Sturm–Liouville

4.1

Expansión de Sturm–Liouville

Las expansiones en series de Fourier, que hemos utilizado hasta ahora, tienen una generalización que es muy importante en las aplicaciones a la ingeniería, la cual trataremos muy generalmente en este capítulo sin entrar en detalles teóricos de la misma. Esta generalización, que es mejor conocida como una teoría, es debida a *Jacques Sturm* y *Joseph Liouville*, ella produce una nueva expansión basada en funciones que reflejan las propiedades físicas del sistema estudiado.

La nueva expansión nos permite expresar las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales parciales, las cuales podrían ser analíticamente intratables, en una forma conveniente, así como la expansión en serie de Fourier de senos nos permitió resolver el problema del flujo de calor visto en la sección 3.2.

Ahora bien la clave de la generalización de Sturm–Liouville para la expansión en serie de senos recae sobre la ecuación

$$\begin{aligned}y'' &= \lambda y, \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

que estudiamos en la sección 1.5 y conocida como ecuación del oscilador armónico. El problema de encontrar soluciones no triviales de (4.1) es un caso particular del *problema de Sturm–Liouville*

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = \lambda g(x)y\tag{4.2}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\tag{4.3}$$

donde las funciones $f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_0(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$, y

los valores de λ para los cuales la solución existe son conocidos como los autovalores y las correspondientes soluciones no triviales son conocidas como las autofunciones del problema de Sturm–Liouville. Estas soluciones tienen también las propiedades de completitud, oscilación y ortogonalidad, de las series de senos, con respecto a un factor integrante

$$\rho(x) = \frac{g(x)}{f_2(x)} e^{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx} \quad (4.4)$$

también conocido como *función peso del problema de Sturm–Liouville*. Un estudio mas profundo en la teoría de operadores de Sturm–Liouville puede conseguirse en Haberman [19].

Para desarrollar la expansión de la función $f(x)$, la cual es cuadrado integrable sobre el intervalo $[a, b]$, en términos de las soluciones o autofunciones del problema de Sturm–Liouville seguiremos los siguientes pasos:

1. Escribir la solución general de (4.2) como la suma de dos soluciones particulares totalmente independientes con coeficientes indeterminados:

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) \quad (4.5)$$

donde la constante λ aparecerá como un parámetro en las fórmulas. (Para escoger la forma de las soluciones y_1, y_2 , es importante notar que los autovalores λ serán negativos si f_2 y g tienen el mismo signo, en caso contrario serán positivos.)

2. Hacer cumplir una de las condiciones de borde (4.3) mediante la escogencia de c_1 y c_2 . En otras palabras, usar la solución (4.5) dentro de la correspondiente condición (4.3)

$$\alpha_1 [c_1 y_1(a, \lambda) + c_2 y_2(a, \lambda)] + \alpha_2 [c_1 y_1'(a, \lambda) + c_2 y_2'(a, \lambda)] = 0$$

de manera de expresar c_1 en función de c_2 o viceversa, y así obtener la solución en función de una constante múltiple que depende de los valores de las soluciones particulares y sus derivadas en $x = a$, y de las constantes α_1, α_2

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= [\alpha_1 y_2(a, \lambda) + \alpha_2 y_2'(a, \lambda)] y_1(x, \lambda) \\ &\quad - [\alpha_1 y_1(a, \lambda) + \alpha_2 y_1'(a, \lambda)] y_2(x, \lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

3. La restante condición de borde

$$b_1 y(b, \lambda) + b_2 y'(b, \lambda) = 0 \quad (4.7)$$

esta considerada como una ecuación para la variable λ . Por lo tanto insertando, la solución obtenida en el paso anterior, en (4.6) y resolviendo para los autovalores $\{\lambda_n\}_n$, los cuales formarán una sucesión que tiende a $\pm\infty$ de acuerdo a los signos de f_2 y g . La n -ésima autofunción

$$f_n(x) = y(x, \lambda_n)$$

debe tener $n - 1$ ceros dentro del intervalo de definición.

4. Calcular el factor integrante o función peso “ ρ ” mediante la ecuación

$$\rho(x) = \frac{g(x)}{f_2(x)} e^{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx} \quad (4.8)$$

Es importante también notar que las autofunciones serán ortogonales con respecto a ρ

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho &= \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) \rho(x) dx = \|\phi_n\|_\rho^2 \delta_{mn} \\ &= \int_a^b \phi_n(x)^2 \rho(x) dx \delta_{mn}. \end{aligned}$$

5. La expansión de $f(x)$ es entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad (4.9)$$

con los coeficientes a_n dados por

$$a_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle_\rho}{\|\phi_n\|_\rho^2} = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) \rho(x) dx}{\int_a^b \phi_n(x)^2 \rho(x) dx}. \quad (4.10)$$

(Algunas veces estas integrales son un tanto complicadas y un desarrollo numérico como *la regla de Simpson* puede ser utilizado para resolverlas).

Ejemplo 4.1.1. Vamos a desarrollar la expansión de $f(x) = x$ en términos de las autofunciones del sistema

$$y'' = \lambda y, \quad (4.11)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (4.12)$$

En primer lugar la solución de (4.11) es la conocida función

$$y(x) = \begin{cases} c_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x & \text{si } \lambda > 0, \\ c_3 + c_4 x & \text{si } \lambda = 0, \\ c_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_6 \sin \sqrt{-\lambda} x & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

La condición de borde $y(0) = 0$ requiere que $c_1 = c_3 = c_5 = 0$; aplicando la segunda condición de borde tenemos

$$y'(\pi) = 0 = \begin{cases} c_2 \sqrt{\lambda} \cosh \sqrt{\lambda} \pi & \text{si } \lambda > 0, \\ c_4 & \text{si } \lambda = 0, \\ c_5 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} \pi & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

donde las constantes multiplicativas se vuelven redundantes, y además, como buscamos soluciones no triviales, la igualdad solo será posible para los valores de λ de la forma

$$\lambda_n = - \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

Luego las soluciones o autofunciones asociadas al problema (4.11)–(4.12) son

$$y(x, \lambda) = \sin \left(\frac{2n-1}{2} x \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.14)$$

Veamos la figura 4.1 para ver el hecho de los ceros interiores

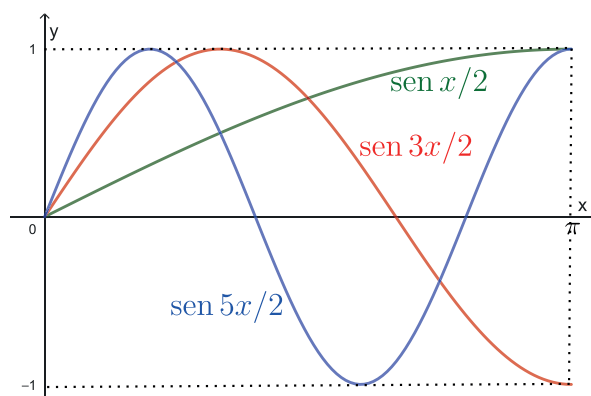


Figura 4.1: $y(x, \lambda) = \sin \left(\frac{2n-1}{2} x \right)$ para $n = 1, 2, 3$.

La expansión de $f(x)$ será

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{2n-1}{2} x \right). \quad (4.15)$$

La ecuación para la función peso es $\rho(x) = \frac{1}{x} e^0 = 1$, y así los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\langle x, \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x \rangle}{\left\| \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x \right\|^2} \\
 &= \frac{\int_0^\pi x \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x \, dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(\frac{2n-1}{2}\right) x \, dx} \\
 &= (-1)^n \frac{4}{(2n-1)^2} \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2

Aplicaciones de las expansiones regulares

De acuerdo al esquema bosquejado en la sección anterior, todas las expansiones de Sturm–Liouville lucen bastante parecidas. Para un sistema de la forma

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = \lambda g(x)y \tag{4.17}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0; \tag{4.18}$$

la solución puede expresarse como la ecuación (4.6), como en la sección 4.1 anterior. Las diferentes aplicaciones solo varían en los nombres de las funciones usadas como soluciones. En esta sección veremos algunas configuraciones de la ecuación de Helmholtz la cual utiliza expansiones en funciones trigonométricas y en funciones de Bessel.

Ejemplo 4.2.1. Las ecuaciones de la figura 4.2 pueden ser interpretadas como las que describen el estado estable de distribución de temperatura en una plancha rectangular.

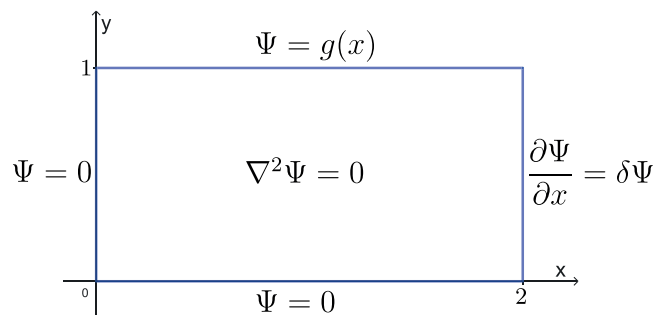


Figura 4.2: Estado estable de distribución de temperatura en una plancha rectangular.

Los lados izquierdo e inferior están en contacto directo con el conducto de calor man-

tenido a cero grados, pero el lado derecho está parcialmente protegido de el conducto de calor a través de un aislamiento permeable, es decir, deja pasar cierto calor (esto conduce a una condición de borde de Robin); y la temperatura del lado superior es mantenida mediante la relación $\Psi(x, 1) = g(x)$.

Como vimos en la sección 2.6 la ecuación de Laplace se separa en las ecuaciones del oscilador armónico

$$F'' = \lambda F \text{ y } G'' = -\lambda G.$$

Puesto que hay condiciones homogéneas en ambos casos, nosotros analizaremos la variable “ x ” primero. La ecuación general es la siempre conocida

$$F(x) = \begin{cases} c_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x & \text{si } \lambda > 0, \\ c_1 + c_2 x & \text{si } \lambda = 0, \\ c_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} x & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

y cuando $a = 0$, la ecuación (4.6) de la sección anterior satisfaciendo la relación

$$\Psi(0, y) = F(0) G(y) = 0$$

(es decir, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$ en (4.18); y la segunda solución particular $y_2(0, \lambda) = 0$ mientras que la primera $y_1(0, \lambda) = 1$) conduce a la solución

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} -\sinh \sqrt{\lambda} x & \text{si } \lambda > 0 \\ -x & \text{si } \lambda = 0 \\ -\sin \sqrt{-\lambda} x & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Ahora tenemos que satisfacer la condición de borde de Robin $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \delta \Psi$ en el lado derecho, con la cual determinaremos los valores de λ . Para ello utilizaremos la ecuación correspondiente para “ x ”

$$F'(2) - \delta F(2) = 0$$

(es decir, $b = 2$, $\beta_1 = -\delta$ y $\beta_2 = 1$ en la ecuación (4.18)). Por lo cual la ecuación para la correspondiente condición toma la forma

$$0 = \begin{cases} -\sqrt{\lambda} \cosh 2\sqrt{\lambda} + \delta \sinh 2\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0, \\ -1 + \delta & \text{si } \lambda = 0, \\ -\sqrt{-\lambda} \cos 2\sqrt{-\lambda} + \delta \sin 2\sqrt{-\lambda} & \text{si } \lambda < 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Recordemos que la ecuación (4.20) debería tener un número infinito de soluciones λ_n que tienden a $-\infty$, ya que la mayoría de las soluciones provienen de la tercera ecuación de (4.20). De esta forma, a menos que la constante $\delta = 1$, la segunda ecuación no contribuirá en la solución; por conveniencia vamos a ignorar esta posibilidad.

Las otras ecuaciones en (4.20) son fáciles de visualizar si redefinimos la variable λ como $\pm \hat{\omega}^2$ y escribimos de nuevo la ecuación (4.20) de la forma

$$0 = \begin{cases} -\hat{\omega} \cosh 2\hat{\omega} + \delta \sinh 2\hat{\omega} & \text{si } \lambda = \hat{\omega}^2 > 0, \\ -\hat{\omega} \cos 2\hat{\omega} + \delta \sin 2\hat{\omega} & \text{si } \lambda = -\hat{\omega}^2 < 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

la cual es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \delta \tanh 2\hat{\omega} & \text{si } \lambda = \hat{\omega}^2 > 0, \\ \hat{\omega} &= \delta \tan 2\hat{\omega} & \text{si } \lambda = -\hat{\omega}^2 < 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

En la figura 4.3 se muestran los gráficos del lado izquierdo y derecho de cada una de las ecuaciones de (4.22) para el caso $\delta = 1$ (En la mayoría de las situaciones físicas el valor de δ debería ser negativo, pero nosotros escogimos ese valor positivo debido a los interesantes puntos de intersección que vemos en la figura 4.3). Los puntos de intersección ($\hat{\omega}$) corresponden a los asociados autovalores ($\lambda_n = \pm \hat{\omega}^2$).

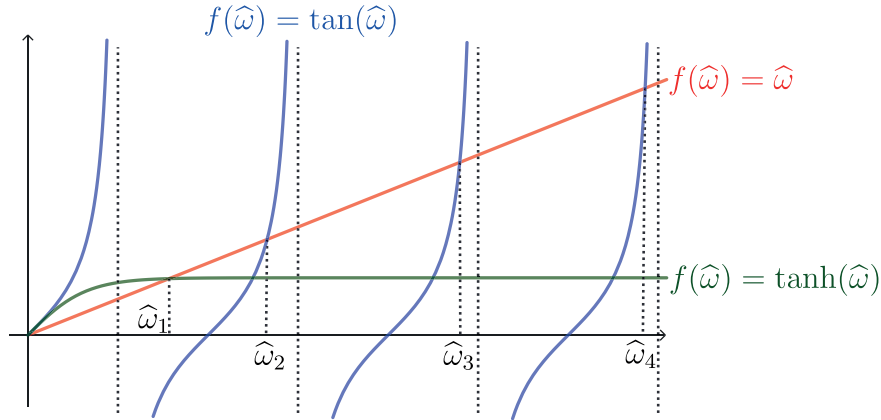


Figura 4.3: Gráficos del lado izquierdo y derecho de las ecuaciones (4.22) con $\delta = 1$.

Los puntos de intersección se pueden hallar fácilmente por iteraciones sucesivas de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \tanh 2\hat{\omega}_v, \\ \hat{\omega}_n &= k\frac{\pi}{2} + \frac{\tan^{-1}(\hat{\omega}_v)}{2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $\hat{\omega}_n, \hat{\omega}_v$ son el nuevo y viejo valor para $\hat{\omega}$ respectivamente.

De los valores de las intersecciones vemos que para $\delta = 1$ hay un solo autovalor positivo $\lambda_1 = \widehat{\omega}_1^2 \approx 0,957^2 \approx 0,916$; los demás son autovalores negativos. Demos una pequeña lista de los mismos

$$\lambda_1 = \widehat{\omega}_1^2 \approx 0,957^2 \approx 0,916 \quad , \quad \phi_1(x) = \sinh \sqrt{\lambda_1} x \approx \sinh 0,957x$$

$$\lambda_2 = \widehat{\omega}_2^2 \approx -2,137^2 \approx -4,567 \quad , \quad \phi_2(x) = \sin \sqrt{\lambda_2} x \approx \sin 2,137x$$

$$\lambda_3 = \widehat{\omega}_3^2 \approx -3,798^2 \approx -14,425 \quad , \quad \phi_3(x) = \sin \sqrt{\lambda_3} x \approx \sin 3,798x$$

$$\lambda_4 = \widehat{\omega}_4^2 \approx -5,406^2 \approx -29,225 \quad , \quad \phi_4(x) = \sin \sqrt{\lambda_4} x \approx \sin 5,406x$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Observemos que el signo menos que precedía a las funciones en (4.19) no lo hemos tomado en cuenta. Notemos además en la figura 4.4 que los patrones de oscilación son los mencionados en la teoría y el número de ceros también coincide.

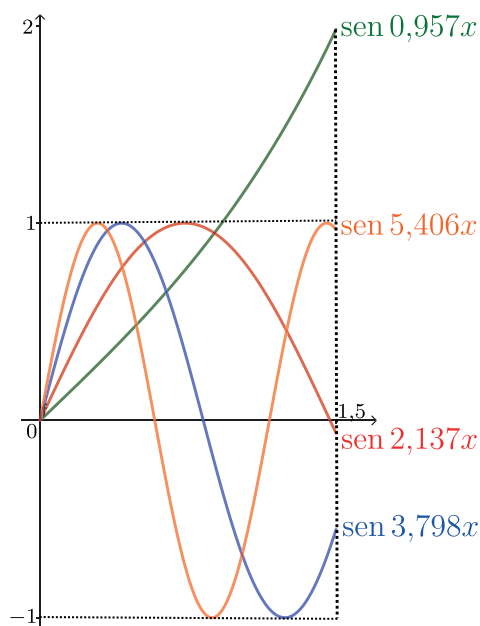


Figura 4.4: Patrones de oscilación.

Por otra parte estos autovalores variarían cuando δ varíe, por ejemplo si $\delta = ,5$ tendríamos que la primera ecuación de (4.22) no tiene solución, luego todos los autovalores serán negativos.

Para completar el análisis del problema de la figura 4.2, recordemos que la solución general para la variable “ y ”, sobre la ecuación

$$G'' = -\lambda G,$$

viene dada por

$$G(y) = \begin{cases} d_1 \cos \sqrt{\lambda} y + d_2 \sen \sqrt{\lambda} y & \text{si } \lambda > 0, \\ d_3 + d_4 y & \text{si } \lambda = 0, \\ d_5 \cosh \sqrt{-\lambda} y + d_6 \sinh \sqrt{-\lambda} y & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

y las correspondientes soluciones satisfaciendo la restante condición de borde homogénea de Dirichlet

$$\Psi(x, 0) = F(x)G(0) = 0$$

(es decir, $G(0) = 0$) en el lado inferior de la figura son

$$G(y) = \begin{cases} \sen \sqrt{\lambda} y & \text{si } \lambda > 0, \\ y & \text{si } \lambda = 0, \\ \sinh \sqrt{-\lambda} y & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

y como hemos descartado el caso $\lambda = 0$, al combinar con las correspondientes autofunciones de “ x ” tenemos, para $\delta = 1$ la forma general que satisface las tres condiciones de borde homogéneas

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & a_1 \sinh 0,957x \sen 0,957y \\ & + a_2 \sen 2,137x \sinh 2,137y + a_3 \sen 3,798x \sinh 3,798y \\ & + a_4 \sen 5,406x \sinh 5,406y + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Finalmente para satisfacer la última condición de borde $\Psi(x, 1) = g(x)$ requerimos que

$$\begin{aligned} g(x) = y(x, 1) = & a_1 \sinh 0,957x \sen 0,957 \\ & + a_2 \sen 2,137x \sinh 2,137 + a_3 \sen 3,798x \sinh 3,798 \\ & + a_4 \sen 5,406x \sinh 5,406 + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora para hallar los valores de los coeficientes de (4.25) utilizamos la ecuación (4.10) de la sección 4.1 para cada una de las autofunciones

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{\int_0^2 g(x) \sinh 0,957x \, dx}{\left(\int_0^2 \sinh^2 0,957x \, dx \right) \sen 0,957}, \quad a_2 = \frac{\int_0^2 g(x) \sen 2,137x \, dx}{\left(\int_0^2 \sen^2 2,137x \, dx \right) \sinh 2,137}, \\ a_3 = \frac{\int_0^2 g(x) \sen 3,798x \, dx}{\left(\int_0^2 \sen^2 3,798x \, dx \right) \sinh 3,798}, \quad a_4 = \frac{\int_0^2 g(x) \sen 5,406x \, dx}{\left(\int_0^2 \sen^2 5,406x \, dx \right) \sinh 5,406}, \dots \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2. Las condiciones de borde para el sistema

$$y'' = \lambda y, \quad (4.26)$$

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \quad (4.27)$$

no son de la misma categoría que hemos pedido para los problemas regulares de Sturm–Liouville. Estas son conocidas como “condiciones de borde periódicas”, por este motivo las soluciones $y(x)$ también deben ser periódicas (Para ver esto debería mostrarse que el valor de todas las derivadas de y en $x = 0$ deben coincidir con el valor de las misma en $x = 2\pi$, y así la expansión en serie de Taylor de $y(x)$ alrededor de estos dos puntos va a ser la misma).

Anticipándonos, como hemos hecho anteriormente, podemos decir que los autovalores serán negativos y escribiremos la solución general a (4.26) como

$$\Psi(x, y) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} x \quad \text{para} \quad \lambda < 0. \quad (4.28)$$

Obviamente la ecuaciones (4.27) son satisfechas si $\sqrt{-\lambda}$ es un entero, ya que fácilmente podemos ver que cualquier otro valor solo nos conduce a la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Luego los autovalores son $\lambda_n = -n^2$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, y asociado con cada uno de ellos hay dos autofunciones

$$\begin{aligned} \phi_n^{(1)}(x) &= \cos nx, \\ \phi_n^{(2)}(x) &= \sin nx, \end{aligned} \quad (4.29)$$

excepto para $n = 0$ donde solo el coseno es no trivial. Por supuesto que lo que tenemos son las familiares series de Fourier, y como la función peso $\rho(x) = 1$ entonces la fórmula para la expansión es la que vimos en la sección 1.6

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

□

El problema periódico de Sturm–Liouville ((4.26), (4.27)) puede surgir cuando la coordenada angular θ es separada de la ecuación de Helmholtz, como vimos en la sección 3.4. Considere, por ejemplo, el estado estable de temperatura de un disco de cuero

como el que muestra la figura 4.5.

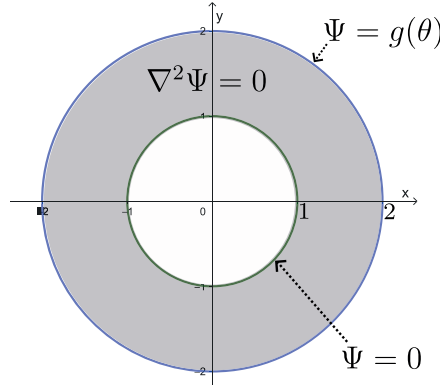


Figura 4.5: Estado estable de temperatura de un disco de cuero.

Como vimos en la sección 3.4 substitución de las coordenadas polares nos conduce a las ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta) \quad (4.31)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda R(r) = 0. \quad (4.32)$$

De acuerdo al esquema que hemos utilizado a través de todo el texto, primero vamos a procesar las condiciones de borde homogéneas en ambas caras de una misma variable. Esto descarta el uso de (4.32) inicialmente por la condición de borde de Dirichlet para $r = 2$.

Puesto que, ciertamente, no hay ninguna cara donde θ sea constante en el borde, sin embargo, el hecho de que el borde $\theta = 0$ está situado en el interior del disco implica que la solución varía suavemente a través del mismo; en otras palabras $\Theta(\theta)$ es periódica. Por lo tanto adjuntamos condiciones de borde periódicas a la ecuación (4.31) y concluimos que las autofunciones son la familia de Fourier (4.29), con $\lambda_n = -n^2$. Lo cual nos produce una solución de la forma (4.30).

De aquí la ecuación (4.32) se vuelve la ecuación equidimensional

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - n^2 R(r) = 0$$

con soluciones

$$\begin{aligned} R_0(r) &= c_1 + c_2 \log r, \\ R_n(r) &= c_1 r^n + c_2 r^{-n} \text{ para } n > 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

La condición de borde homogénea de Dirichlet en el círculo interior es satisfecha al

cumplirse la relación $R(1) = 0$; esto nos permite seleccionar los coeficientes en (4.33) de manera que tengamos las soluciones

$$\begin{aligned} R_0(r) &= \log r \\ R_n(r) &= r^n + r^{-n}, \text{ para } n > 0; \end{aligned}$$

y así podemos ensamblar la solución general

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n^{(1)}(\theta) R_n(r) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n^{(2)}(\theta) R_n(r) \\ &= \frac{a_0}{2} \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) (r^n - r^{-n}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ahora buscamos satisfacer el último requerimiento, que es la condición de borde no homogénea y tenemos

$$\Psi(2, \theta) = g(\theta) = \frac{a_0}{2} \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) (2^n - 2^{-n}),$$

donde los coeficientes vienen dados por la fórmula de la ecuación (4.30)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi \log 2} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \\ a_n &= \frac{1}{\pi(2^n - 2^{-n})} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n > 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi(2^n - 2^{-n})} \int_0^{2\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Podemos ahora reiterar que aunque hay innumerables conjuntos de expansiones para las autofunciones de un problema regular de Sturm–Liouville, sin embargo ellas todas pueden ser manejadas por medio del mismo procedimiento; y las integrales que puedan surgir al tratar de resolver la ecuación (4.10) de la sección 4.1, no deben ser de mayor preocupación, ya que precisos algoritmos de integración numérica podrán ser utilizados para la solución de las mismas.

Aplicaciones de las expansiones singulares

Cuando uno o ambos de los puntos extremos en un problema de Sturm–Liouville tiende a $\pm\infty$, o cuando el coeficiente de la derivada segunda y'' en la ecuación diferencial diverge en uno de los bordes, el problema se convierte en singular.

Para resolver este problema, uno usualmente tiene que descartar la condición de borde en el punto extremo (o también llamado singular), se impone en su lugar solo la condición finita. El conjunto resultante de autovalores puede permanecer discreto, en cuyo caso las expansiones de las autofunciones son series infinitas como en el caso regular; o los autovalores pueden ser todo un conjunto continuo de valores, con sus expansiones desarrollándose como integrales.

Ahora veremos un ejemplo que nos permitirá ver como proceder en estos casos singulares o puntos extremos infinitos.

Ejemplo 4.3.1. Consideremos el problema del estado estable de temperatura, mostrado en la figura 4.6(a), para resolver la ecuación de Laplace en un rectángulo semi-infinito.

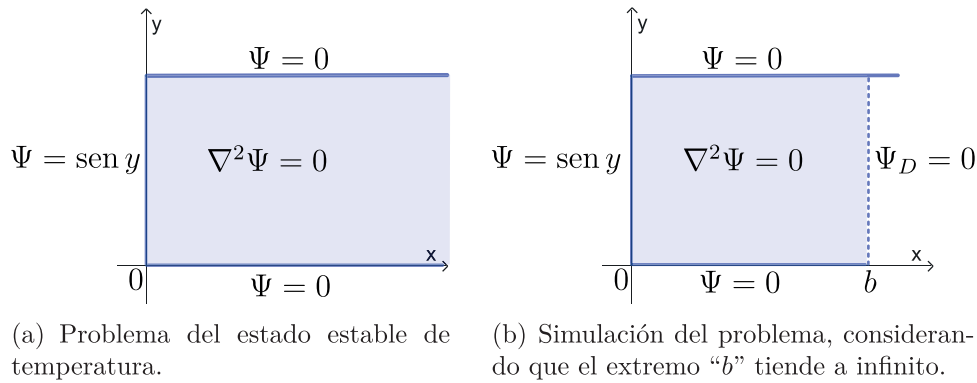


Figura 4.6: Problema y simulación.

Físicamente hablando esta es una idealización de un caso imaginario o irreal, quizás podemos simular una configuración parecida a esta en la figura 4.6(b), donde debemos considerar que el extremo “b” tiende a infinito.

La solución de el problema de la figura 4.6(b) es, evidentemente, muy familiar para nosotros, ya que es del tipo del subproblema 4 de la sección 3.2; y por lo cual el término n -ésimo de la solución general que satisface todas las condiciones de borde homogéneas es

$$\Psi_n(x, y) = a_n \sinh n(b - x) \sin ny$$

y obviamente la condición de borde no homogénea se satisface cuando $n = 1$ y con la

escogencia de $a_n = \frac{1}{\sinh b}$; por lo cual

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= \frac{1}{\sinh b} \sinh(b-x) \sin y \\ &= \frac{1}{\sinh b} (\sinh b \cosh x - \cosh b \sinh x) \sin y \\ &= (\cosh x - \coth b \sinh x) \sin y.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Para obtener una solución al problema infinito de la figura 4.6(a), hacemos que b tienda a $+\infty$; así $\coth b$ tiende a 1 y entonces la solución tiende a

$$\begin{aligned}\Psi_D(x, y) &= (\cosh x - \sinh x) \sin y \\ &= e^{-x} \sin y\end{aligned}\tag{4.36}$$

la cual satisface todas las condiciones del problema de la figura 4.6(a).

Notemos que hubiese ocurrido si la condición de borde impuesta en $x = b$ fuese de Neumann en vez de Dirichlet. Claramente el término n -ésimo sería

$$\Psi_n(x, y) = a_n \cosh n(b-x) \sin ny$$

luego en vez de la ecuación (4.35) tendríamos

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= \frac{1}{\cosh b} \cosh(b-x) \sin y \\ &= \frac{1}{\cosh b} (\cosh b \cosh x - \sinh b \sinh x) \sin y \\ &= (\cosh x - \tanh b \sinh x) \sin y.\end{aligned}\tag{4.37}$$

pero al calcular los límites la solución sigue manteniéndose como

$$\begin{aligned}\Psi_n(x, y) &= (\cosh x - \sinh x) \sin y \\ &= e^{-x} \sin y.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Esto podría significar que la única solución para el problema de la figura 4.6(a) es

$$\Psi(x, y) = e^{-x} \sin y;$$

y la respuesta es NO, ya que si adicionamos a la anterior solución cualquier factor constante de la función $\sinh x \sin y$, es decir,

$$\Psi(x, y) = e^{-x} \sin y + K \sinh x \sin y,\tag{4.39}$$

obtendremos una solución válida para todas las ecuaciones del problema de la figura 4.6(a). Sin embargo la ecuación (4.39), cuando $K \neq 0$, diverge cuando $x \rightarrow +\infty$, así la única solución que converge a un valor finito es la ecuación (4.36).

4.4

Ejercicios

Ejercicio 4.4.1. Encontrar los autovalores y las correspondientes autofunciones de la ecuación

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi$$

bajo las condiciones de borde

$$1. \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

$$3. \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$2. \quad y(0) = y'(\pi) = 0$$

$$4. \quad y(0) + y'(0) = y(\pi) = 0$$

Ejercicio 4.4.2. Supongamos que

$$\begin{aligned} \alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y &= \lambda g(x)y(x), \\ y(a) &= 0, \quad y(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

es un problema regular de Sturm–Liouville y que $y_1(x, \lambda)$ y $y_2(x, \lambda)$ son dos soluciones independientes de la ecuación diferencial (4.40). Muestre que las autofunciones son de la forma

$$\Psi_p(x) = y_2(a, \lambda_p) y_1(x, \lambda_p) - y_1(a, \lambda_p) y_2(x, \lambda_p)$$

o un múltiplo constante de la misma, donde $\{\lambda_p : p = 1, 2, 3, \dots\}$ son las raíces de

$$y_2(a, \lambda_p) y_1(b, \lambda_p) - y_1(a, \lambda_p) y_2(b, \lambda_p) = 0.$$

Ejercicio 4.4.3. En el ejemplo 4.2.1 vimos que las ecuaciones en (4.22) nos condujeron a la solución del problema planteado, habiendo escogido un valor de $\delta = 1$. Se mantendrá el mismo patrón para las soluciones si ahora tomamos un $\delta = 0,1$. Halle los primeros 4 autovalores y autofunciones en este caso.

Ejercicio 4.4.4. Resuelva el problema planteado en la figura 4.7

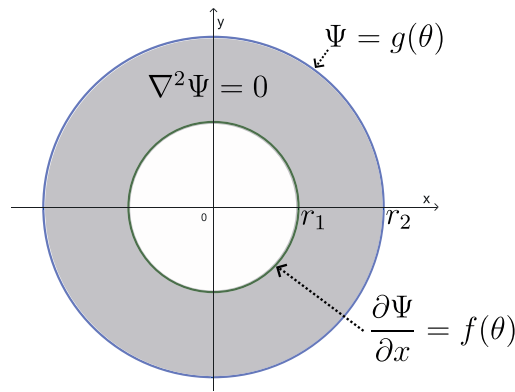


Figura 4.7: Problema.

Ejercicio 4.4.5. Supongamos que δ es un parámetro dado en la ecuación del oscilador armónico amortiguado

$$y'' + \delta y' = \lambda y,$$

con λ como su autovalor. Muestre que bajo las condiciones de Dirichlet $y(0) = y(1) = 0$, la expansión de autofunciones asociada es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\delta \frac{x}{2}} \sin n\pi x$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) e^{+\delta \frac{x}{2}} \sin n\pi x \, dx$$

Ejercicio 4.4.6. Resuelva el problema equivalente al del ejemplo 4.3.1, simplemente moviendo la condición no homogénea para la parte superior de la figura.

Ejercicio 4.4.7. Resuelva el problema indicado en la figura 4.8 y muestre que su solución se aproxima a la ecuación (4.36), de la sección 4.3, cuando b tiende a infinito.

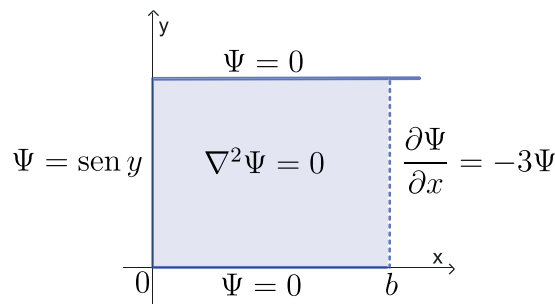


Figura 4.8: Problema.

Ejercicio 4.4.8. Resuelva los problemas planteados en las figuras 4.9(a) y 4.9(b).

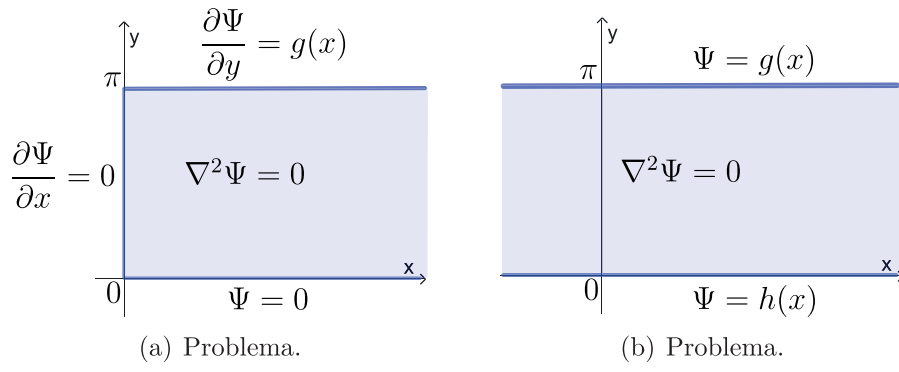


Figura 4.9: Problemas.



Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, MILTON; STEGUN, IRENE A y otros: *Handbook of mathematical functions*, volumen 10. Dover, New York, 1968.
- [2] APOSTOL, TOM M.: *Mathematical analysis*. @World student series edition. Addison-Wesley, Reading/Mass. [u.a.], 2ª edición, 1974.
- [3] BIRKHOFF, G. y ROTA, G.C.: *Ordinary Differential Equations*. Introductions to higher mathematics. Wiley, 1978. ISBN: 9780471074113.
- [4] BROWN, J.W. y CHURCHILL, R.V.: *Fourier Series and Boundary Value Problems*. Brown-Churchill Series. McGraw-Hill, 6ª edición, 2001. ISBN: 9780072325706.
- [5] BURDEN, R.L. y FAIRES, J.D.: *Análisis numérico*. International Thomson Editores, 2002. ISBN: 9789706861344.
- [6] BYERLY, W.E.: *Introduction to the Calculus of Variations*. Mathematical tracts for physicists. Harvard University Press, 1917. ISBN: 9780598964465.
- [7] CARSLAW, H.S.: *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. Macmillan and Company, limited, 3ª edición, 1930.
- [8] CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C.: *Operational Methods in Applied Mathematics*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, 2ª edición, 1963.
- [9] CHESTER, C.R.: *Techniques in Partial Differential Equations*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [10] CODDINGTON, A. y LEVINSON, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill New York, 1955. ISBN: 9780070992566.

- [11] COURANT, R. y HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics*, volumen 2 de *Goldstine Printed Materials*. Wiley, 1953. ISBN: 9780470179529.
- [12] DAVIS, HARRY F y SNIDER, ARTHUR DAVID: *Introduction to vector analysis*. Wm. C. C. Brown, Dubuque, IA, 1995.
- [13] DAVIS, H.F.: *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN: 9780486140735.
- [14] DUCHATEAU, PAUL y ZACHMANN, DAVID W: *Applied partial differential equations*. Courier Corporation, 2002.
- [15] DWIGHT, HB: «Table of roots for natural frequencies in coaxial type cavities». *Journal of Mathematics and Physics*, 1948, **27(1-4)**, pp. 84–89.
- [16] EDWARDS, ROBERT E: *Fourier Series: A Modern Introduction Volume 2*, volumen 85. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] FRIEDMAN, AVNER: *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications, 2008.
- [18] GREENBERG, MICHAEL D: *Foundations of applied mathematics*. Courier Corporation, 2013.
- [19] HABERMAN, R.: *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. Pearson Educación, 2003. ISBN: 9788420535340.
- [20] HELLWIG, GÜNTER: *Partial differential equations: An introduction*. Springer-Verlag, 2013.
- [21] INCE, EDWARD L: *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 1956.
- [22] JACKSON, JOHN DAVID: *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.
- [23] KREIDER, DONALD L; KULLER, ROBERT G y OSTBERG, DONALD R: *Ecuaciones diferenciales*. BOGOTA; MEXICO: FEISA, 1973.
- [24] LUKE, YUDELL L: *Integrals of Bessel functions*. Courier Corporation, 2014.
- [25] MIRANDA, CARLO: *Partial differential equations of elliptic type*. Springer-Verlag, 2013.
- [26] NAGLE, R KENT; SAFF, EDWARD B y otros: *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1992.
- [27] PANOFSKY, WOLFGANG KH y PHILLIPS, MELBA: *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.

- [28] PROTTER, MURRAY H y WEINBERGER, HANS F: *Maximum principles in differential equations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [29] RAMO, SIMON; WHINNERY, JOHN R y VAN DUZER, THEODORE: *Fields and waves in communication electronics*. John Wiley & Sons, 1994.
- [30] SAFF, E.B. y SNIDER, A.D.: *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice Hall, 1993. ISBN: 9780133274615.
- [31] SMIRNOV, M.M.: *Problems on the Equations of Mathematical Physics*. Traducido por W.I.M. Wils, 1977.
- [32] SMITH, DONALD R: *Variational methods in optimization*. Courier Corporation, 1998.
- [33] SNEDDON, IAN N: *Elements of partial differential equations*. Courier Corporation, 2006.
- [34] SNEDDON, I.N.: *The Use of Integral Transforms*. McGraw-Hill, 1972. ISBN: 9780070594364.
- [35] SNIDER, A.D.: *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*. Advances in Interfacial Engineering. Prentice Hall, 1999. ISBN: 9780136743590.
- [36] STRANG, G. y FIX, G.: *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, 2008. ISBN: 9780980232707.
- [37] STRANG, GILBERT: *Introduction to applied mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1986.
- [38] TREVES, F.: *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients: Existence, Approximation, and Regularity of Solutions*. Gordon and Breach, 1966. ISBN: 9780677011905.
- [39] WATSON, GEORGE NEVILLE: *A treatise on the theory of Bessel functions*, volumen 2. The University Press, Cambridge, 1922.
- [40] WEINBERGER, HANS F: *A first course in partial differential equations: with complex variables and transform methods*. Courier Corporation, 2012. ISBN: 9780471006237.

Índice alfabético

- Autofunciones
 - del Problema de Sturm–Liouville, 108
- Autovalores
 - del Problema de Sturm–Liouville, 108
- Condiciones
 - de Borde, 31
 - de borde
 - de Robin, 88
 - homogéneas de Dirichlet, 81
 - homogéneas de Neumann, 84
- Condición
 - de Borde
 - de Dirichlet, 31, 33
 - de Neumann, 31, 33
 - de Robin, 31, 33
 - Euler–Lagrange, 18
 - inicial
 - de Cauchy, 6
- Conjunto
 - de las funciones continuas en D
 - conjuntamente con sus derivadas de orden m , 5
- Constante
 - de separación, 71, 78
- Curva
 - longitud del arco de una, 14
- Curvas
 - características
 - de la ecuación diferencial parcial general de segundo orden en dos variables, 55
- Densidad
 - de la cuerda, 25
- Difusividad térmica, 39
- Discriminante, 53
- Ecuaciones
 - de Maxwell, 34
- Ecuación
 - característica
 - de la ecuación diferencial parcial general de segundo orden en dos variables, 55
 - de Bessel, 99
 - de Euler–Lagrange, 18
 - de Helmholtz, 97
 - de la onda, 53
 - de tercera dimensión, 35
 - en dos dimensiones, 33

- en una dimensión, 25
 - no homogénea, 37
- de Laplace, 19, 44, 53
- de Tricomi, 57
- del calor, 39, 53
 - Principio del Máximo, 43
- del Oscilador Armónico, 9
- no homogénea
 - características, 7
- parte principal de la, 54
- EDP, 1
 - de orden 2
 - discriminante, 3
 - elíptica, 3
 - hiperbólica, 3
 - parabólica, 3
 - lineal, 2
 - a coeficientes constantes, 2
 - orden, 2
 - solución, 5
- Elipse, 53
- Energía
 - almacenada en un campo potencial eléctrico, 15
- Flujo
 - del calor, 38
- Fuerza
 - neta de la tensión, 32
 - neta de tensión vertical, 24
- Funcional, 14
- Funciones
 - esféricas de Bessel, 102
- Función
 - continua
 - por segmentos, 12
 - de densidad probabilística
 - m -ésimo momento, 15
 - periódica, 11
 - peso del problema de
 - Sturm–Liouville, 108
 - pulso coseno, 30
 - seccionalmente continua, 12
- Fórmula
 - de Poisson, 49
 - del Laplaciano, 41
- Hipérbola, 53
- Integral
 - de Dirichlet, 19
- Lagrangiano, 15
- Lema
 - Fundamental del Cálculo de Variaciones, 17
- Ley
 - de Fourier, 38
 - de Newton
 - segunda, 24, 26
- Orden
 - de una EDP, 2
- Parábola, 53
- Período de una función, 11
- Principio
 - del Máximo
 - para Funciones Armónicas, 50
 - del Máximo de la Ecuación del Calor, 43
- Problema
 - de Sturm–Liouville, 107
 - autofunciones, 108
 - autovalores, 108
 - función peso, 108
- Serie
 - de Fourier, 12
 - de cosenos, 13
 - de senos, 13

Solución

de una EDP, 5

Teoría

de Sturm–Liouville, 79

Valor

medio, 14

Variable

casi-espacio, 57

casi-tiempo, 57

Velocidad

de propagación de la onda en la

cuerda, 25

Índice de símbolos

- $Im(z)$ parte imaginaria del complejo z , 51
 $Re(z)$ parte real del complejo z , 48
 $\arg(z)$ argumento del complejo z , 52
 $\chi[\cdot]$ el Lagrangiano, 15
 $C^m(D)$ el conjunto de las funciones continuas en D conjuntamente con sus derivadas de orden m , 5
 $\operatorname{erf}(x)$ función error, 44
 $s(y(x))$ longitud del arco de la curva $y(x)$, 14
EDO Ecuación Diferencial Ordinaria, 1
EDP Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales, 1

Índice de figuras

1.1. Conductibilidad térmica en una barra.	4
1.2. Problemas de equilibrio.	4
1.3. Cuerda tensa que vibra a baja amplitud.	5
1.4. Función periódica $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$. . .	11
1.5. Curva más corta $y(x)$ que conecta los puntos $(0, y(0))$ y $(1, y(1))$	15
2.1. Movimiento de la vibración de una cuerda extendida.	23
2.2. Tensión T para pequeños movimientos de una cuerda totalmente flexible. . .	24
2.3. Gráfico de $f(x)$ y $f(x-1)$	25
2.4. $f(x)$ trasladada (vt) unidades a la derecha.	26
2.5. Desplazamientos.	28
2.6. Desplazamiento de las perturbaciones.	29
2.7. Desplazamientos para varios valores de t	30
2.8. Condiciones de borde para la cuerda.	31
2.9. Tambor vibrante.	32
2.10. Campo eléctrico dentro del cubo.	35
2.11. Calor que fluye dentro de la caja rectangular.	38
2.12. Concavidad de la función f	42
2.13. Ecuación de Laplace $\nabla^2 \Psi = 0$ con condiciones de borde de Dirichlet. . .	47
2.14. Condiciones de Dirichlet en los bordes de una cuña.	48
2.15. Familia de isotermas en una posición de equilibrio de una plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente.	50
2.16. Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.	51
2.17. Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.	52
2.18. Plancha de metal con temperatura en los bordes mantenida inicialmente. . .	52

2.19. Condiciones de borde de Dirichlet son inapropiadas para las ecuaciones hiperbólicas.	59
3.1. Plancha de metal con temperatura Ψ	62
3.2. Subproblemas.	64
3.3. Problema planteado.	65
3.4. Subproblemas.	66
3.5. Plancha cuadrada de un material de conductividad térmica.	68
3.6. Subproblemas.	69
3.7. Funciones $\sinh x$, x y $\sin x$	73
3.8. Posiciones de las condiciones.	80
3.9. Subproblema caso (a) con condición de borde no homogénea $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1$ en la cara superior del cuadrado.	81
3.10. Problema.	82
3.11. Subproblemas.	84
3.12. Problema.	85
3.13. Problema.	86
3.14. Subproblemas.	88
3.15. Problema.	93
3.16. Problema y subproblemas.	94
3.17. Problema.	102
3.18. Problema.	103
3.19. Problema.	104
3.20. Problema.	104
3.21. Problema.	104
3.22. figura656	105
3.23. Problema.	105
3.24. Problema.	105
3.25. Problema.	105
4.1. $y(x, \lambda) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x$ para $n = 1, 2, 3$	110
4.2. Estado estable de distribución de temperatura en una plancha rectangular.	111
4.3. Gráficos del lado izquierdo y derecho de las ecuaciones (4.22) con $\delta = 1$	113
4.4. Patrones de oscilación.	114
4.5. Estado estable de temperatura de un disco de cuero.	117
4.6. Problema y simulación.	119
4.7. Problema.	122
4.8. Problema.	122
4.9. Problemas.	123

Autores

Carreras García Francisco de Asís



Doctor of Philosophy (Ph D.) en Ciencias de la Ingeniería, University of South Florida, USA.

Ha desarrollado su carrera como docente e investigador en las áreas de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Real y Análisis Complejo de la Escuela Básica de la Facultad de Ingeniería de La Universidad de Los Andes, Venezuela, por más de 35 años, donde fue jefe del departamento de Cálculo y Director de la Escuela Básica de Ingeniería. Ha publicado artículos científicos en revistas de alto impacto en su área de investigación. Durante 7 años fue docente ocasional investigador de La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) de Ecuador, donde formó parte de la comisión que elaboró el proyecto de maestría en matemática que actualmente se dicta en esa institución. También ha trabajado como profesor en los posgrados en Ingeniería Química en la Universidad de Los Andes, Venezuela y en la ESPOCH de Ecuador.

Cova Salaya Carlos Eduardo



MgSc en Matemática, Universidad de Los Andes, Venezuela.

Ha desarrollado su carrera como docente e investigador en las áreas de Análisis Funcional y Topología en la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de La Universidad de Los Andes, Venezuela; siendo miembro del grupo de investigación de Análisis Funcional, jefe del departamento de Matemáticas y miembro de la comisión curricular que redactó el proyecto de la carrera de matemáticas actual de la mencionada universidad. Ha realizado estudios sobre equivalencias entre los teoremas de representación de Riesz y de Krein-Milman. En los últimos años ha trabajado en las universidades UNACH y UNEMI de Ecuador. Actualmente se desempeña como docente ocasional de la Carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias de La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo de Ecuador.



cienpapers

ISBN: 978-9942-48-336-2



9 789942 483362